$$\int_\gamma \omega$$ con ω 1-forma continua a valori complessi

γ una curva C^1 a tratti.

TEOREMA $U = B(p, \rho) \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

ω è esatta $\iff$ $\displaystyle\int_{\square} \omega = 0$

TEOREMA U aperto di $\mathbb{R}^2$

ω una 1-forma su U

Sono equivalenti

1) ω è esatta
2) $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$ $\forall$ cammino chiuso γ
3) $\forall\, \gamma, \delta$ cammini in U con stesso punto iniziale e stesso punto finale

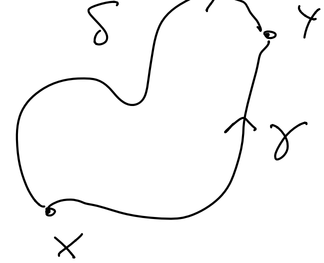
$$\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$$

dim

1) $\Rightarrow$ 2) è il lemma di ieri $\omega = dF$

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 \qquad \gamma : [a, b] \longrightarrow U$$

2) $\Rightarrow$ 3)



Se considero $\gamma * \delta^{-1}$ è un cammino chiuso

$$0 = \int_{\gamma * \delta^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\delta} \omega$$

ovvero $\displaystyle\int_{\gamma} \omega = \int_{\delta} \omega$

3) $\Rightarrow$ 1)

1ª OSSERVAZIONE basta fare il caso U convesso.

Sia $P \in U$ e definisco la primitiva

$$F(Q) = \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è un qualsiasi cammino da P a Q.
Per ipotesi questa definizione non dipende da γ.

$$\omega = a\,dx + b\,dy \qquad Q = (x_1, y_1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_1+\varepsilon, y_1) - F(x_1, y_1)}{\varepsilon}$$

$\boxed{\varepsilon > 0}$

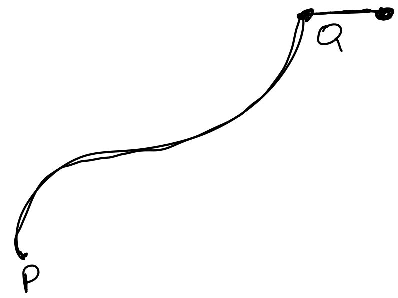
Sia γ una curva qualsiasi da P a Q

$\gamma : [a, b) \longrightarrow U$

e sia $\gamma_\varepsilon : [a, b+\varepsilon] \longrightarrow U$

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) \qquad t \leq b$$

$$\gamma_\varepsilon(b+s) = (x_1+s, y_1)$$



$$\int_{\gamma_\varepsilon} \omega = \int_\gamma + \int \qquad \int_\gamma \omega$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$F(x_1+\varepsilon; y_1) - F(x_1, y_1) =$$

$$= \int_{\delta_\varepsilon} \omega$$

$$\delta_\varepsilon(t) = (x_1+t, y_1) \qquad 0 \leq t \leq \varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x_1+\varepsilon, y_1) - F(x_1, y_1)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\delta_\varepsilon} \omega \qquad \xrightarrow[\delta]{}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \underbrace{(a\,dx + b\,dy)}_{} [\hat{e}_1]\, dt$$

$$a(\delta_\varepsilon(t))\,dx + b(\delta_\varepsilon(t))\,dy$$

$$= \lim \frac{1}{\varepsilon} \int^\varepsilon a(\delta_\varepsilon(t))\, dt = a(Q)$$

$\varepsilon \to 0^+ \qquad \varepsilon \quad 0$

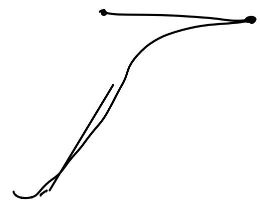
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma_\varepsilon(0).$

nello stesso fatto $\lim_{\varepsilon \to 0^-}$

$\varepsilon < 0$

$$\gamma_\varepsilon : [a, b-\varepsilon] \longrightarrow U$$



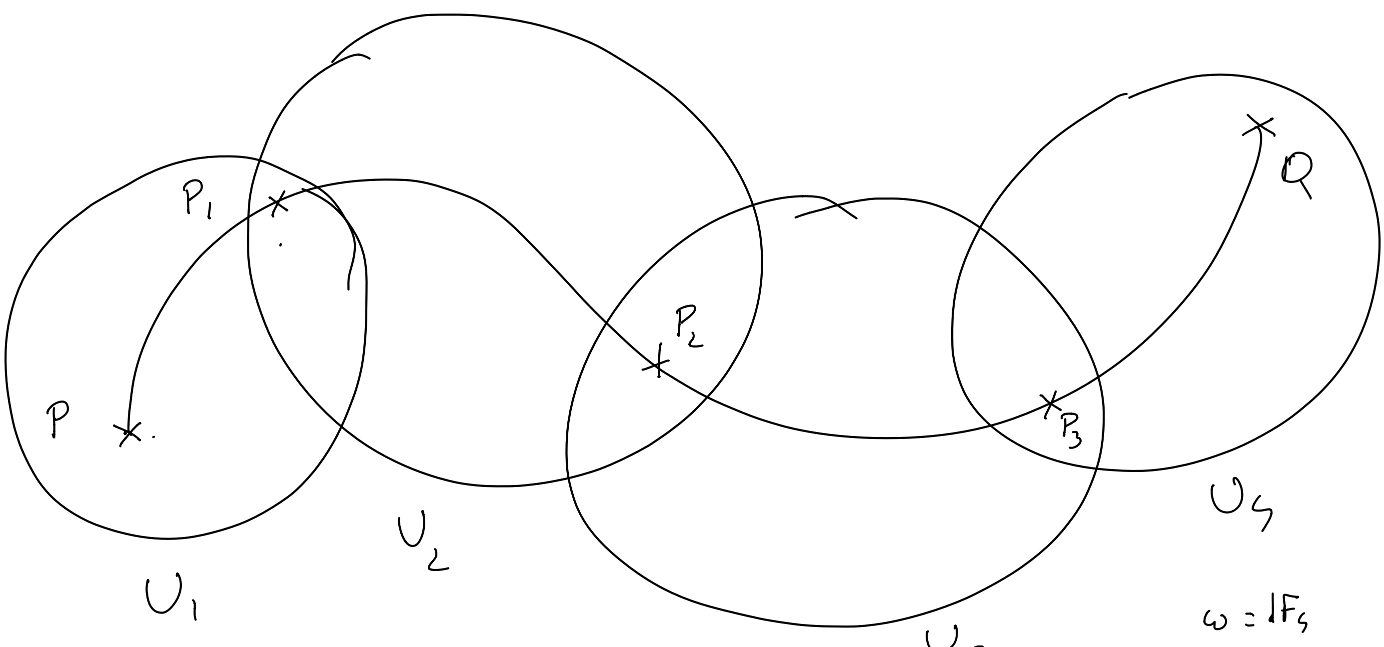
$$\frac{\partial F}{\partial x} = a \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = b$$

#.

INTEGRAZIONE DI FORME CHIUSE LUNGO CURVE C^0.

L'idea è che se $\underset{dF}{\overset{\|}{\omega}}$ è esatta $\int_\gamma dF = F(Q) - F(P)$

dove γ va da P a Q.



$\omega = dF_1 \qquad \omega = dF_2 \qquad \omega = dF_3$

$$F_1(P_1) - F_1(P) + F(P_2) - F(P_1) + \cdots + F(Q) - F(P_3)$$

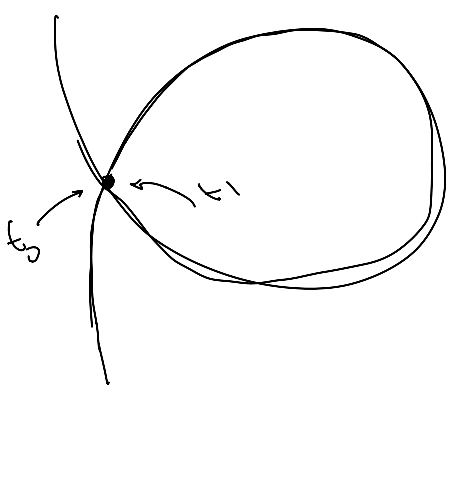
$\boxed{\text{chiuse}}$

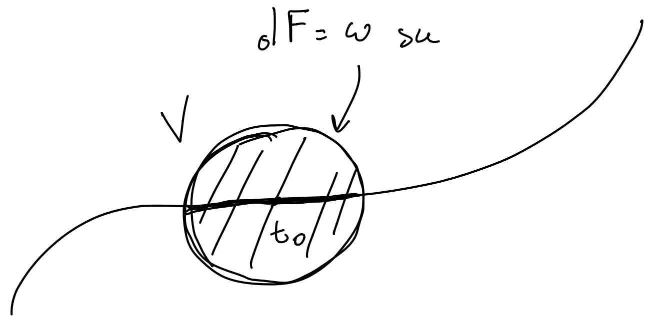
DEFINIZIONE ω una 1-forma su un aperto U di $\mathbb{C}$.

$\gamma : [a, b] \to U$ una curva continua.

Diciamo che $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ è una primitiva di ω lungo γ se $\forall\ t_0 \in [a,b]$ esiste un intorno V di $\gamma(t_0)$ $\underline{V \subset U}$ e una primitiva F di ω su V $dF = \omega$ su V e un $\varepsilon > 0$ tale che

$$\boxed{F(\gamma(t)) = f(t)} \quad \text{per } \underline{|t - t_0| < \varepsilon}$$





$|t - t_0| < \varepsilon$

$\gamma(t) \in B(\gamma(t_0), \varepsilon)$

LEMMA Se ω è una forma chiusa su U

γ è una curva continua $\gamma : [a, b] \to U$

esiste una primitiva di ω lungo γ e tale primitiva

è unica a meno di costante additiva.

Se $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ primitive allora $f_1 - f_2 = c \in \mathbb{C}$.

dim. esistenza. Poiché ω è chiusa $\forall p \in U$

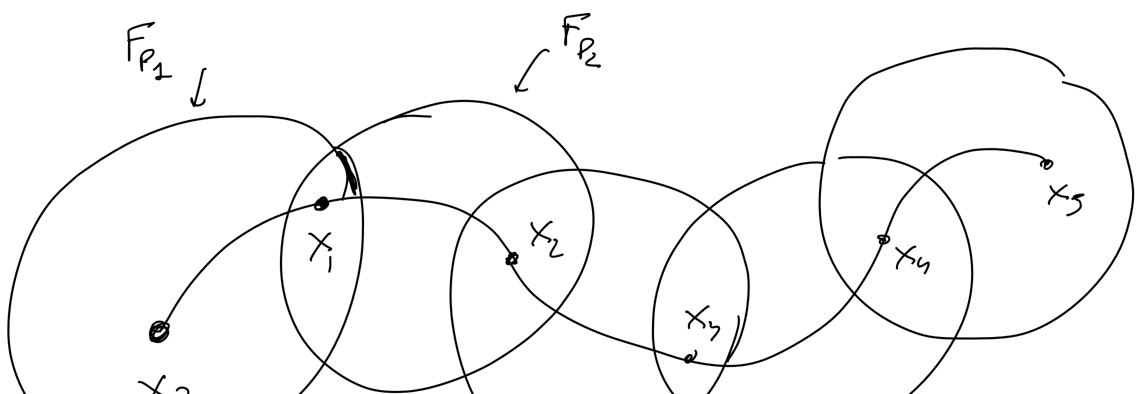
esiste V_p intorno di p e $F_p : V_p \to \mathbb{C}$ $dF_p = \omega$

Per compattezza $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

tali che $\gamma([x_{i-1}, x_i]) \subset V_{p_i}$ per qualche p_i

e definisco $g_i(t) = F_{p_i}(\gamma(t))$ per $t \in [x_{i-1}, x_i]$

vorrei definire $f(t) = g_i(t)$ per $t \in [x_{i-1} ; x_i]$.



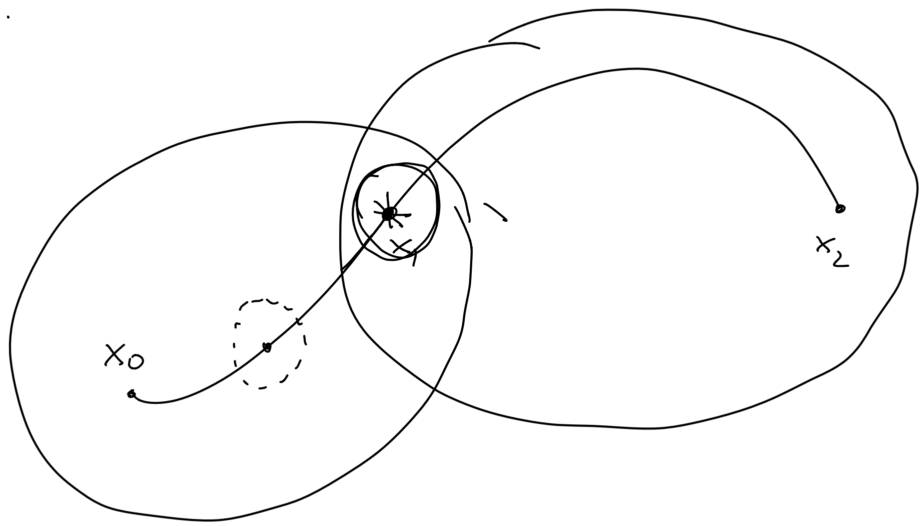
la f così costruita non è detto che sia continua.

sommando ad F_{p_i} una costante posso assumere che $\boxed{F_{p_i}(x_i) = F_{p_{i+1}}(x_i)}$

p. i. $\quad F_{p_1}$ è dato

$$F_2 = F_{p_2} + F_{p_1}(x_1) - F_{p_2}(x_1)$$

In questo modo la f che costruisco è continua.



$$f(t) = \boxed{F_{p_1}}(\gamma(t)) \qquad t \leq x_1$$
$$f(t) = \boxed{F_{p_2}}(\gamma(t)) \qquad t \geq x_1$$

Per $t \neq x_1$ per costruzione esiste un intorno di $\gamma(t)$ e un $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(t) = F_{p_1}(\gamma(t)) \qquad t < x_1$$
$$= F_{p_2}(\gamma(t)) \qquad t > x_1$$

Osserviamo che $d(F_{P_1} - F_{P_2}) = 0$

in un intorno di x_1. Quindi in una

palletta di centro $\gamma(x_1)$ e $F_{P_1} - F_{P_2}$ è costante.

e inoltre $F_{P_1}(\gamma(x_1)) = F_{P_2}(\gamma(x_1))$

e quindi in questa palletta $F_{P_1} = F_{P_2}$

in questa palletta abbiamo $f(t) = F_{P_1}(\gamma(t))$
$f(t) = F_{P_2}(\gamma(t))$
per $|t - x_1| < \varepsilon$ #

unicità Siano f_1 e f_2 due primitive
di ω lungo γ, a meno di sommare
una costante suppongo che $f_1(a) = f_2(a) = 0$
con $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$
voglio dimostrare che $f_1 = f_2$

Sia $f = f_1 - f_2$ e dimostro che f è
localmente costante. (Perché I è connesso $\Rightarrow$ f costante).

Sia $t_0 \in [a, b]$ e sia V intorno connesso di $\gamma(t_0)$

e $\varepsilon > 0$ tale che

$$f_1(t) = F_1(\gamma(t)) \qquad |t-t_0|<\varepsilon$$
$$f_2(t) = F_2(\gamma(t)) \qquad |t-t_0|<\varepsilon$$

con F_1 e F_2 primitive di ω in V.

$$\underline{\underline{f(t)}} = \underline{F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t))} \quad \text{per } \underline{|t-t_0|<\varepsilon}$$

ma $\omega = dF_1 = dF_2$ in V $\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ è costante.

e pure $f(t)$ per $|t-t_0|<\varepsilon$ è costante.

$\Rightarrow$ f è costante

e inoltre $f(a) = f_1(a) - f_2(a) = 0$

#

DEFINIZIONE

Se γ è una curva continua e ω una 1-forma chiusa

$$\int_\gamma \omega = \underline{f}(b) - \underline{f}(a)$$

dove $\gamma : [a,b] \to U$ $\quad f$ è una primitiva di ω lungo γ.

Per il lemma precedente questo numero è ben definito.

→ questa definizione non dipende dalla parametrizzazione di γ

$$\delta(t) = \gamma(\varphi(t)) \qquad \varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

$$\varphi(c) = a \qquad \varphi(d) = b.$$

e f è una primitiva di ω lungo γ allora $f \circ \varphi$ è una primitiva di ω lungo δ

$$\int_\delta \omega = f(\varphi(d)) - f(\varphi(c)) = f(b) - f(a) = \int_\gamma \omega$$

$$\rightarrow \quad \int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

<u>TEOREMA</u> Sia U un aperto di $\mathbb{C}$ (per $\mathbb{R}^m$ sarebbe uguale), sia ω una 1-forma (sottointeso continua a valori complessi) su U e sia ω chiusa.

Siano α, β due curve chiuse omotope.

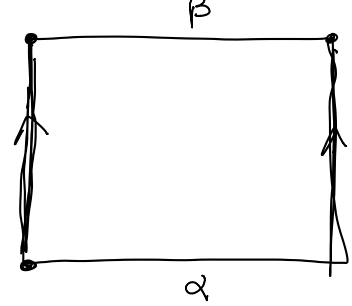
$$\alpha, \beta : [0, 1] \longrightarrow U \qquad \alpha(0) = \alpha(1)$$
$$\beta(0) = \beta(1)$$

e sia H una omotopia di curve chiuse

$$H : I \times I \longrightarrow U$$

$$H_0 = \alpha \qquad H_1 = \beta$$

$H(0,s) = H(1,s)$



[ovvero se considero

$\hat{\alpha}, \hat{\beta} : S^1 \longrightarrow U$

$\hat{\alpha}(e^{i\vartheta}) = \alpha\left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)$ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ sono omotope]

Allora

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

[In particolare se $\alpha, \beta \in \Omega(U, x_0, x_0)$ omotopi come cammini allora $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$]

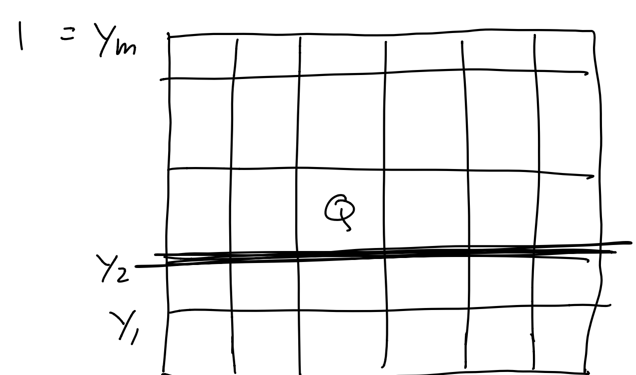
<u>dim.</u>

ω chiusa: $\exists$ un ricoprimento di U fatto di aperti V_i (palle) tale che $\forall i$ $\exists F_i : V_i \longrightarrow \mathbb{C}$ e $dF_i = \omega$ su V_i

Per il teorema del numero di Lebesgue esistono

$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$

e $y_0 = 0 < y_1 < \dots < y_m = 1$



$0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n = 1$

tali che $H(Q) \subset V_i$ che indico con $V_{i(Q)}$

dove $Q = [x_{j-1}; x_j] \times [y_{h-1}; y_h]$

Definisco delle nuove curve

$$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_m$$

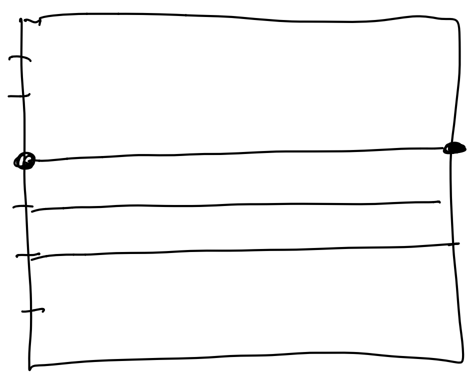
$$\alpha_i(t) = H(t, y_i)$$

$$\alpha_0 = \alpha \qquad \alpha_m = \beta$$

- Tutte queste sono curve chiuse

$$\alpha_i(0) = \alpha_i(1)$$

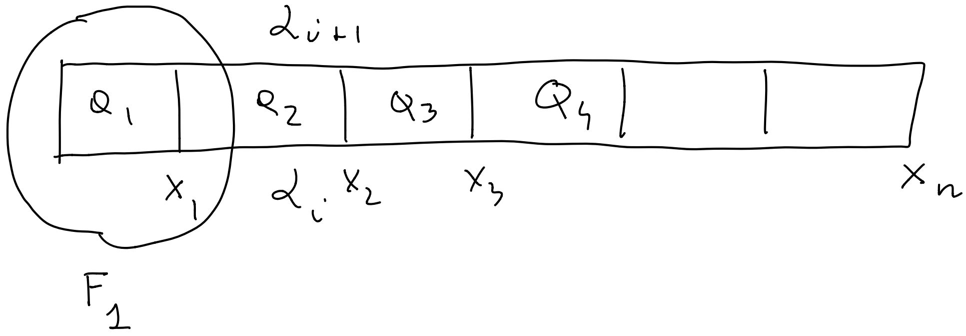
$\alpha_m = \beta$



$\alpha_0 = \alpha$

e dimostro

$$\int_{\alpha_i} \omega = \int_{\alpha_{i+1}} \omega$$



$F_1 \; \dots \quad F_n$

$V_1 \quad\quad V_n$ con $H(Q_i) \subset V_i$

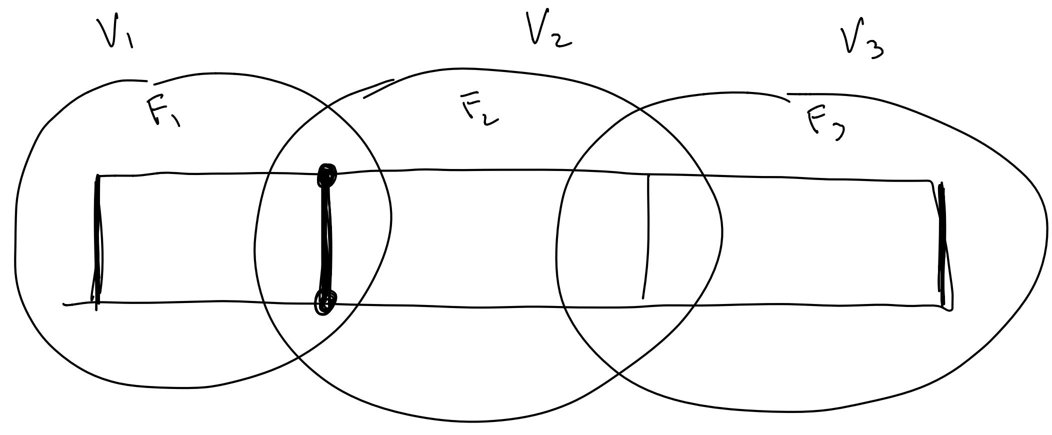
e $dF_i = \omega$ su V_i

$$\int_{\alpha_i} \omega = \underbrace{\int_{x_0 \to x_1} \omega}_{} + \int_{x_1 \to x_2} \omega + \cdots + \int_{x_{n-1} \to x_n} \omega$$

$$\alpha_i \big|_{[x_i ; x_{i+1}]}$$

$$\int_{\alpha_i} = \begin{array}{l} F_1(\alpha_i(x_1)) - F_1(\alpha_i(x_0)) + \\ F_2(\alpha_i(x_2)) - F_2(\alpha_i(x_1)) + \\ \quad\vdots \\ F_n(\alpha_i(x_n)) - F_n(\alpha_i(x_{n-1})) \end{array}$$

$\int_{\alpha_{i+1}}$ Le stesse espressioni con α_{i+1}.



OSSERVAZIONE F_1 e F_2 sono primitive di ω in $V_1 \cap V_2$ che è convesso.

$F_1 - F_2$ è costante in $V_1 \cap V_2$

$$\underline{F_1(\alpha_i(x_1)) - F_2(\alpha_i(x_1))}$$
$$\parallel$$
$$F_1(\alpha_{i+1}(x_i)) - F_2(\alpha_{i+1}(x_i)) = c_i$$

$$\int_{\alpha_i} \omega =$$

$$= \underline{F_1(\alpha_i(x_1))} - F_1(\alpha_i(x_0)) +$$
$$F_2(\alpha_i(x_2)) - \underline{F_2(\alpha_i(x_1))} +$$
$$\vdots$$
$$F_n(\alpha_i(x_n)) - F_n(\alpha_i(x_{n-1}))$$

$$= c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} - F_1(\alpha_i(x_0)) + F_n(\alpha_i(x_n))$$

Lo stesso ragionamento dice anche che

$$F_n(\underline{\alpha_i(x_n)}) - F_1(\underline{\alpha_i(x_0)})$$
$$\parallel$$
$$F_n(\alpha_{i+1}(x_n)) - F_1(\underline{\alpha_{i+1}(x_0)}) = c_n$$

$= c_1 + c_2 + \dots + c_n$

$$\int_{\alpha_{iH}} \omega$$ fanno la stessa somma e quindi gli integrali sono uguali #

TEOREMA (VARIANTE)

Nelle ipotesi su U e ω di prima
Se α, β cammini da x a y omotopi come cammini

$$H : I \times I \longrightarrow U \qquad H_0 = \alpha \quad H_1 = \beta \qquad H(0,s) = x \quad H(1,s) = y$$

allora $$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

OSSERVAZIONE

U aperto di $\mathbb{C}$ $\quad x_0 \in U$

$\Pi_1 = \Pi_1(U, x_0)$

forme chiuse su U $= Z^1 \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_{gr.}(\Pi_1 ; \mathbb{C})$

DEF $\quad \omega \longrightarrow \Phi(\omega)[\gamma] = \int_\gamma \omega$

è ben definita per il teorema precedente

- $\underline{\Phi(\omega)}: \pi_1^* \longrightarrow \mathbb{C}^+$ è di gruppi

$$\Phi(\omega)\,[\gamma_1 * \gamma_2] = \int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$= \Phi(\omega)\,[\gamma_1] + \Phi(\omega)\,[\gamma_2].$$

- Osservo che Φ è lineare.

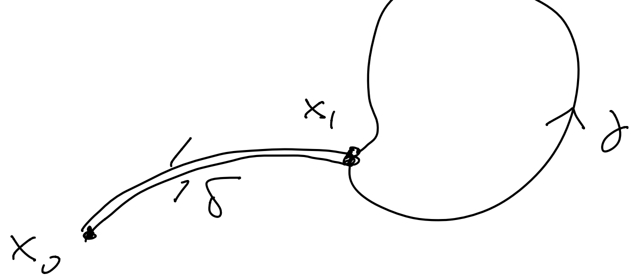
1) $\Phi(\omega_1 + \omega_2) = \Phi(\omega_1) + \Phi(\omega_2)$
2) $\Phi(\lambda\omega) = \lambda\Phi(\omega)$

1) $$\underset{\displaystyle \int_\gamma \omega_1 + \omega_2}{\underset{\shortparallel}{\Phi(\omega_1+\omega_2)[\gamma]}} = \underset{\displaystyle \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2}{\underset{\shortparallel}{\Phi(\omega_1)[\gamma] + \Phi(\omega_2)[\gamma]}}$$

2) analogo.

- $\text{Ker}\,\Phi = \left\{ \omega \in Z^1 : \int_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma \text{ da } x_0 \text{ a } x_0 \right\}$

questo è equivalente a $\int_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma$ chiusa.



$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega + \int_\delta \omega + \int_{\delta^{-1}} \omega$$

$$= \int_{\delta * \gamma * \delta^{-1}} \omega = 0 .$$

Quindi $\operatorname{Ker} \Phi = B^1 =$ forme esatte.

- Quindi Φ induce una mappa iniettiva

$$\frac{Z^1}{B^1} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{gr}(\pi_1 ; \mathbb{C})$$

$$\boxed{\text{LA FORMA } \frac{dz}{z}}$$

Sia $U = \mathbb{C}^*$ e $\omega = \frac{1}{z}\, dz$

è una 1-forma.

FATTO ω È CHIUSA (le prossime

settimana dimostreremo una affermazione più generale di questo).

$$\omega = \frac{1}{x+iy}(dx + i\,dy) =$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2}(dx + i\,dy)$$

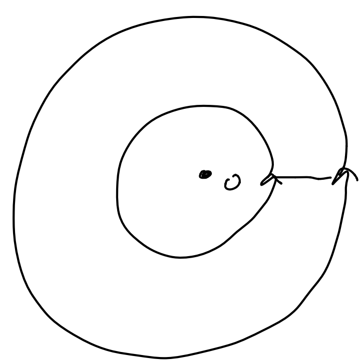
$$= a\,dx + b\,dy$$

$$a = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \qquad b = \frac{ix+y}{x^2+y^2}$$

VERIFICATE $\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}$

quindi ω è chiusa

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} =$$



$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\pi i\, \cancel{e^{2\pi i t}}}{\cancel{e^{2\pi i t}}}\,dt = 2\pi i$$