Lezione: Lunedì 19/4 14:00-16:00
anziché martedì 20/4 9:00-11:00

Def: $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $b\in\mathbb{C}^{n}$

$$K_j(A,b)=\mathrm{span}\left(b,Ab,A^2b,\dots A^{j-1}b\right)=\{v : v=p(A)b,\ \deg(p)<j\}$$

Arnoldi: calcola una base o.n. $\{v_1,v_2,\dots v_j\}$ di $K_j(A,b)$ iterativamente

$$\text{no}\quad A\underbrace{\left[v_1\ v_2\ v_3\ \dots\ \boxed{v_j}\right]}_{V_j}=\underbrace{\left[v_1\ v_2\ \dots\ v_{j+1}\right]}_{V_{j+1}}\underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1j}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & & h_{2j}\\ 0 & h_{32} & h_{33} & & \vdots\\ 0 & 0 & h_{43} & & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & h_{jj}\\ \hline & & & & h_{j+1,j}\end{bmatrix}}_{\mathbb{C}^{(j+1)\times j}\qquad \underline{H}_{j+1,j}}$$

$$= H_j\in\mathbb{C}^{j\times j}$$

$$w=A\cdot v_j=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_jv_j+\alpha_{j+1}v_{j+1}$$

prodotti scalari $\quad v_i^TAv_j \quad \|w-\dots\|$

$$\boxed{H_j}=V_j^*AV_j$$

$\mathrm{eig}(H_j)$ approssimano (alcuni) autovalori di A

Teo: siano V_n, H_n prodotti da n passi di Arnoldi su $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $b\in\mathbb{C}^m$

Per ogni polinomio p di grado $<n$

$$p(A)b=V_n\,p(H_n)\underbrace{V_n^*b}_{=\|b\|\cdot e_1}$$

$$v_1=\frac{b}{\|b\|}$$

$V_nV_n^* =$ matrice proiezione ortonormale su $K_n(A,b)$

dim: per linearità, basta farlo sui monomi

$$V_n H_n^j V_n^* b = \underbrace{V_n V_n^* A V_n V_n^* A V_n \cdots V_n^* A V_n V_n^* A V_n V_n^* b}_{j \text{ volte } V_n^* A V_n}$$

$V_n V_n^* b \overset{"}{=} b$ perché $b \in K_n(A,b)$

$A V_n V_n^* b = Ab$

$V_n V_n^* A b = Ab$ perché $Ab \in K_n(A,b)$

$A V_n V_n^* A V_n V_n^* b = A^2 b$

finché $j<n$, tutte queste quantità stanno in $K_n(A,b)$, e quindi le proiezioni non fanno nulla

$$V_n H_n^j V_n^* b = A^j b \quad \square$$

$$p(A)b = V_n\, p(H_n)\, V_n^* b \quad \forall\, p \text{ di grado} < n$$

Suggerisce di approssimare

$$\underset{\text{su } \Lambda(A)}{p(A)b} = f(A)b \quad \text{con} \quad c = V_n f(H_n) V_n^* b = V_n \hat{p}(H_n) V_n^* b \overset{\text{lemma}}{=} \hat{p}(A) b$$

$\hat{p}$ polinomio di interp. di f su $\Lambda(H_n)$ di grado $< n$

Perché funziona?

$$A = W \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} W^{-1}$$

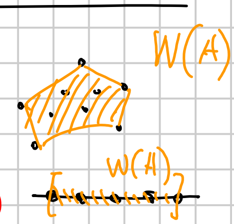
$$f(A) \approx p(A) = W \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} W^{-1} \qquad \hat{p}(A) = W \begin{bmatrix} \hat{p}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{p}(\lambda_n) \end{bmatrix} W^{-1}$$

gli autoval. di H_n sono approssimaz. degli autoval. "esterni" dello spettro di A

$\Rightarrow$ sugli autoval "esterni", $f(\lambda_i) \approx \hat{p}(\lambda_i)$

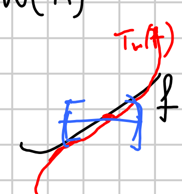
$f(\mu_i) = \hat{p}(\mu_i)$ per un $\mu_i \in \Lambda(H_n)$, $\mu_i \approx \lambda_i$

Teo: sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\boxed{\text{normale}}$, $W(A) = \text{Conv}(\Lambda(A))$



p il polinomio di miglior approssimazione di f su $W(A)$ di grado $\leq n$

$$p = \arg\min \max_{x \in W(A)} |f(x) - p(x)|$$



$\delta = \max_{x \in W(A)} |f(x) - p(x)|$ è questo minimo

$c = V_n f(H_n) V_n^* b$

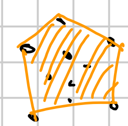
Allora, $$\|f(A)b - c\| \leq 2\delta \cdot \|b\|$$

dim: nota che gli autovalori di H_n stanno tutti in $W(A)$:

difatti, $H_n w = \mu w$ $\quad \mu = \dfrac{w^* H_n w}{w^* w} = \dfrac{(w^* V_n^*) A (V_n w)}{(w_* V_n^*)(V_n w)}$ è un quoziente di

Rayleigh di A, e i quozienti di Rayleigh stanno nell'inviluppo

convesso degli autovalori



Lemma: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \dfrac{x^* A x}{x^* x} \in \mathrm{Conv}(\Lambda(A))$

A normale

dim: $A = W \Lambda W^*$ $\quad y = W^* x$ $\quad \dfrac{x^* A x}{x^* x} = \dfrac{y^* \Lambda y}{y^* y} = \sum \dfrac{|y_i|^2 \lambda_i}{\sum |y_i|^2}$

$$\|f(A)b - c\| = \|f(A)b - V_n f(H_n) V_n^* b\| \quad \text{(sommo e sottraggo } p(A)b)$$

$$= \|(f-p)(A)b - V_n (f-p)(H_n) V_n^* b\|$$

$$\leq \|(f-p)(A)b\| + \|V_n (f-p)(H_n) V_n^* b\|$$

$$\leq \underbrace{\|(f-p)A\|}_{\boxed{\leq} \, \delta} \cdot \|b\| + \underbrace{\|(f-p)(H_n)\|}_{\boxed{\leq} \, \delta} \cdot \|b\| \leq 2\delta \|b\| \quad \square$$

$A = Q \Lambda Q^*$ $\quad (f-p)(A) = Q \, \underbrace{(f-p)(\Lambda)}_{\text{diagonale con elem.} \leq \delta} \, Q^*$

ortonormale

Def: $$W(A) = \left\{ \frac{x^* A x}{x^* x} : x \in \mathbb{C}^n, \; x \neq 0 \right\}$$

"numerical range" o "field of values" di A

Teo: per ogni f, e per ogni $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ [Crouzeix - Palencia]

$$\|f(A)\| \leq (1+\sqrt{2}) \max_{x \in W(A)} |f(x)|$$

Congettura: si può rimpiazzare con un 2.

Teo: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^{n}$,

$$\delta = \min_{\deg p < n} \max_{x \in W(A)} |f(x) - p(x)|$$

$$\|f(A)b - V_n f(H_n) V_n^* b\| \leq 2\delta\,(1+\sqrt{2}) \cdot \|b\|.$$

Varianti di Arnoldi:

1) Extended Arnoldi: costruisce una base ortonormale di

$$\left\{ p(A)b, \quad p(x) = \alpha_{-n_1} x^{-n_1} + \alpha_{-n_1+1} x^{-n_1+1} + \dots + \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n_2} x^{n_2} \right\}$$

2) Rational Arnoldi: fissato q di grado $n+1$, costruisce una base o.n. di

$$\left\{ q(A)^{-1} p(A) b ; \ p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} \right\}$$

Idea: parto da $v_1 = \frac{b}{\|b\|}$, ad ogni passo

EA: costruisco $w = Av$ in alcuni passi, $\boxed{w = A^{-1} v}$, con v un vettore opportuno nello spazio costruito finora

RA: prendo $\boxed{w = (A - \sigma_j I)^{-1} v}$ — costo maggiore

Produce: 1) V base ortonorm. dello spazio

2) $A V_{n+1} \underline{K}_{n+1,n} = V_{n+1} \underline{H}_{n+1,n}$ da cui posso ottenere un'approssimazione $A_n = K_n^{-1} H_n$ di A

I teoremi visti valgono anche per queste varianti di Arnoldi:

1) $f(A)b = V_n f(H_n) V_n^* b$ per $f \in$ ~~{polinomi di grado < n}~~

EA: {polinomi di Laurent di grado $\leq (n_1, n_2)$}

RA_q: {funzioni raz. di grado $< n$ con denom. q fissato}

2) $$\| f(A)b - V_n f(H_n) V_n^* b \| \leq 2\delta \|b\| (1+\sqrt{2})$$

dove $\delta = \min \max_{W(A)} |f(x) - p(x)|$

su $p \in$ polinomi di Laurent (EA)

oppure

f. razionali $p(x)/q(x)$ con $q(x)$ fissato

rktoolbox: costruisce basi di Arnoldi generalizzate su spazi

$$K_{n,q}(A,b) = \{ q(A)^{-1} p(A) b : p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} \}$$

per $q(x)$ fissato di grado $\leq n-1$

ES: se $q = x^{n-1}$, $q(x)^{-1} p(x) = \frac{1}{x^{n-1}} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1})$

ES: se $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ $r(x) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

ES: se ho 4 "poli all'infinito", $q(x) = 1$, $q(x)^{-1} p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$

[Güttel 2013, review]

Se ad ogni passo uso $A - \sigma I$, allora ottengo $r(x) = \frac{p(x)}{(x-\sigma)^{n-1}}$

$$\min_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \max_{x \in W} | \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \exp(x) |$$

$$\min_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} \max_{x \in W} \left| \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}{(x-1)^2} - \exp(x) \right|$$