14 aprile 2021

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \qquad u' = Au \qquad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sistema autonomo (non dip. dal tempo)

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad e^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ y(y) = \qquad\quad c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

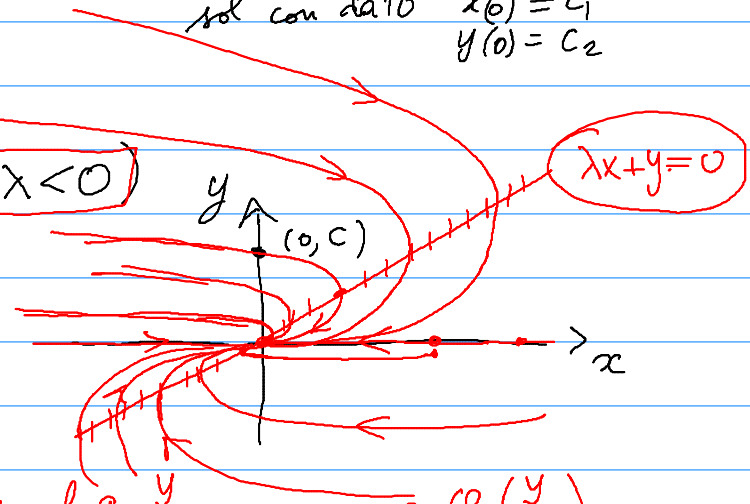
sol con dato $x(0)=c_1$, $y(0)=c_2$

Come sono fatte le traiettorie $\boxed{(\lambda<0)}$

se $c_2 = 0$ $\quad x = c e^{\lambda t}$ $\quad y = 0$

se $c_1 = 0$

$$x(t) = c\, t e^{\lambda t}$$
$$y(t) = c\, e^{\lambda t}$$



$$x = \frac{y}{\lambda} \log \frac{y}{c} = c\,\varphi\left(\frac{y}{c}\right)$$

con $\varphi(\xi) = \frac{\xi}{\lambda} \log \xi$

Riprendo la classificazione del comportamento dei sist. 2x2

$u' = Au \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

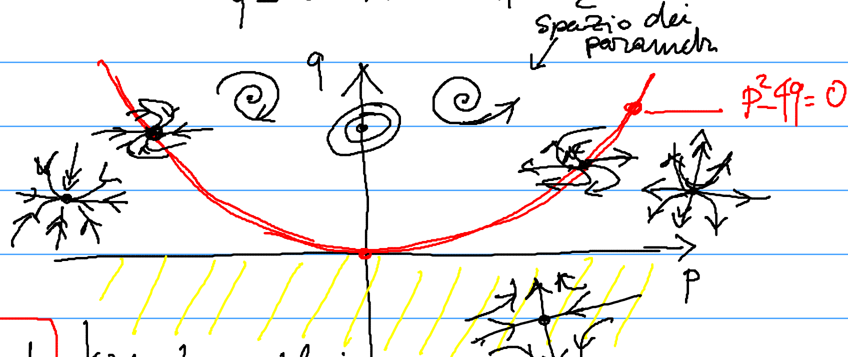
$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$

$= \lambda^2 - p\lambda + q$

$\Delta = p^2 - 4q$

$p = \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$

$q = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2$



(1) Autov. reali distinti

autov. con segno opposto

$q<0$ pto di sella

$q>0$ $\begin{cases} p<0 & \text{nodo stabile} \\ p>0 & \text{nodi instabile} \end{cases}$

(2) $\boxed{\text{Autov. coincid.}}$

$\Delta = 0$

Nodo degenere $\begin{cases} \text{stab } p<0 \\ \text{instab } p>0 \end{cases}$

Nodo a stella $\begin{cases} \text{stab } p<0 \\ \text{instab } p>0 \end{cases}$

(3) Autov. complessi

Nel caso 3. $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \qquad \exists\, h \in \mathbb{C}^2 : \quad Ah = \lambda h$

$\bar\lambda = \alpha - i\beta \qquad \bar h \qquad A\bar h = \overline{Ah} = \bar\lambda \bar h$

autov. complesso

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(h + \bar h) \\ \eta = \frac{1}{2i}(h - \bar h) \end{cases}$$

$$A\xi = \frac{1}{2}(Ah + A\bar h) = \frac{1}{2}(\lambda h + \bar\lambda \bar h)$$

$$\begin{cases} h = \xi + i\eta \\ \bar h = \xi - i\eta \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left((\alpha+i\beta)(\xi+i\eta) + (\alpha-i\beta)(\xi-i\eta)\right)$$

$$\boxed{A\xi = \alpha\xi - \beta\eta \qquad A\eta = \beta\xi + \alpha\eta}$$

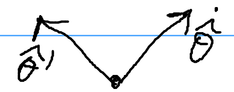
Nelle coordinate risp. a ξ, η la trasformazione diventa $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Cerco le soluz. $\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

$$x' = \rho' \cos\theta - \rho\theta' \sin\theta = \alpha \rho \cos\theta - \beta \rho \sin\theta$$
$$y' = \rho' \sin\theta + \rho\theta' \cos\theta = \beta \rho \cos\theta + \alpha \rho \sin\theta$$

$$\boxed{\rho'} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}}_{\hat{\theta}} + \theta'\rho \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\hat{\theta}'} = \boxed{\alpha\rho} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \beta\rho \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



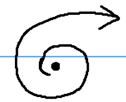
$$\begin{cases} \rho' = \alpha \rho \\ \theta' = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta(t + t_0) \end{cases}$$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow \rho(t) = \text{cost}$

$\leftarrow$ centro

Se $\alpha > 0 \Rightarrow$ fuoco instabile



fuoco instabile

Se $\alpha < 0 \Rightarrow$ fuoco stabile

<u>Esercizio</u>: (1) classificare il sistema $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$

(2) scrivere esplicitam. le soluzioni (3) descrivere geometricam. le orbite

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow \det(A - \lambda I)$$

mostrare che sia $x(t)$ che $y(t)$ sono soluzioni dell'equazione

$$u'' - (\operatorname{tr} A) u' + (\det A) u = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det(A)$$

polinomio caratt. dell'eq

Provare a usare questo criterio per scrivere esplicitamente le soluzioni dell'eq precedente (punto 2 dell'er. sopra)

SISTEMI AUTONOMI

non dipende dal tempo

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} Y' = F(Y) & (*) \\ Y(t_0) = p & (CI) \end{cases}$$

Prob. di Cauchy $\xRightarrow{F \text{ loc Lip}}$ sol esiste loc. è unica

"Soluzione" = "soluzione massimale" $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (int. massimale)

- Per ogni punto $p \in \Omega$ passa un'unica orbita $\{y(t) : t \in J\}$

se ho Y_1, Y_2 sol di $(*)$ tali che $Y_1(t_1) = Y_2(t_2) = p$

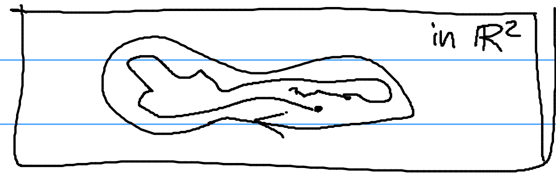
allora $\underbrace{y_2(t)}_{\forall t} = \underbrace{y_1(t + t_1 - t_2)}_{\tilde{y}_1}$ (infatti y_2 e $\tilde{y}_1$ soddisfano $(*)$ con $y_2(t_2) = p = \tilde{y}_1(t_2)$)

- COR: Se y sol ($\ast$) con $y(t_1)=y(t_2)$ allora ...

  $\Rightarrow y$ è periodica

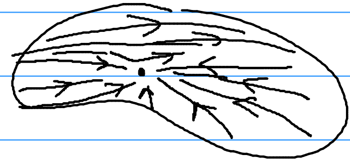
  $y(t) = y(t+t_1-t_2)$

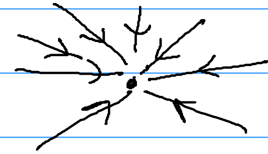
- le traiettorie non si intersecano



- Ω è unione di orbite disgiunte

  (ci possono essere punti singolari $F(p)=0$)





$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

<u>Prop</u>: Se $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ con $\varphi > 0$

Allora il sistema

$$y' = F(y) \quad (\ast)$$

$$u' = \varphi(u)\, F(u) \quad (\ast\ast)$$

hanno le stesse traiettorie

Se y è sol di ($\ast$) con $y(0)=p$ prendo h tale che

$$\begin{cases} h'(t) = \varphi(y(h(t))) \\ h(0)=0 \end{cases}$$

h sol di questa eq.

e considero $u(t) \doteq y(h(t))$

ho che $u'(t) = y'(h(t))\, h'(t) = F(y(h(t)))\, \varphi(y(h(t))) = F(u(t))\, \varphi(u(t))$

con $u(0)=p$

<u>OSS</u>: se y è sol di $y'=F(y)$ allora $u=y(-t)$ è sol di $u'=-F(u)$

$\begin{cases} p_0 \text{ punto stazionario di } y' = F(y) \text{ sse } F(P_0) = 0 \\ \quad y(t) \equiv P_0 \text{ è sol} \end{cases}$

Derivata di una funzione lungo una traiettoria

Se $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ indico con $\dot{V}(p) = \nabla V(p) \cdot F(p)$

<u>Oss</u>: se $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = p \end{cases}$ allora $\dot{V}(p) = \frac{d}{dt} V(y(t)) \Big|_{t=0}$

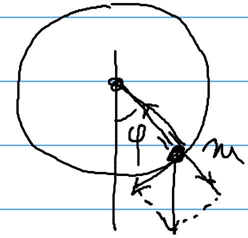
$$\nabla V(y(t)) \cdot y'(t) = \nabla V(y) \cdot F(y) = \nabla V(p) \cdot F(p)$$

se $t = 0$

$\mathcal{E} \in C^1(\Omega)$ si dice integrale primo di $\quad y' = F(y)$

se $\quad \dot{\mathcal{E}}(p) = 0 \quad \forall\, p \in \Omega \qquad$ ($\mathcal{E}$ è costante sulle traiettorie)

Es 1: Pendolo rigido



$F = ma$

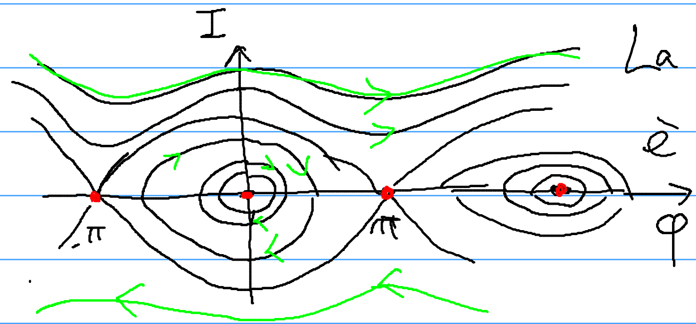
$a_{\parallel} = \varphi'' \ell$

$F_{\parallel} = -mg \sin\varphi$

$$\varphi'' = -k \sin\varphi \qquad k = g/\ell$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \varphi \\ I \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \varphi' = I \\ I' = -k \sin\varphi \end{cases}$$

$\mathcal{E}(I,\varphi) \approx \frac{1}{2} I^2 + \frac{k}{2}\varphi^2$ vicino a 0



La funzione $\mathcal{E}(I,\varphi) = \frac{1}{2} I^2 + k(1-\cos\varphi)$ è un integrale primo del sistema (verificare!)

traiettorie $\quad \mathcal{E}(I,\varphi) = \text{cost}$

Es 2

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (S)$$

(S) è esatto $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ la forma $\omega = g\,dx - f\,dy$ è esatta

OSS: Se (S) è esatto allora ha un integrale primo

dim: ω esatta $\Longrightarrow$ $\exists\, \mathcal{E}$ t.c. $\partial_x \mathcal{E} = g$
$\partial_y \mathcal{E} = -f$

$$\dot{\mathcal{E}} = \nabla \mathcal{E} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = gf - fg = 0$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{E}$ è costante sulle soluzioni

Es 3 Sistemi hamiltoniani $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{cases} p_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}(p,q) \\ q_i' = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p,q) \end{cases}$$

$(\underbrace{p_1, \dots, p_n}_{p}, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$

Verificare che H è un integrale primo

Es 2bis: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ è esatto $\Longleftrightarrow$ $a + d = 0$

usare questo fatto per dare risp. all' es. prec.

STABILITA'

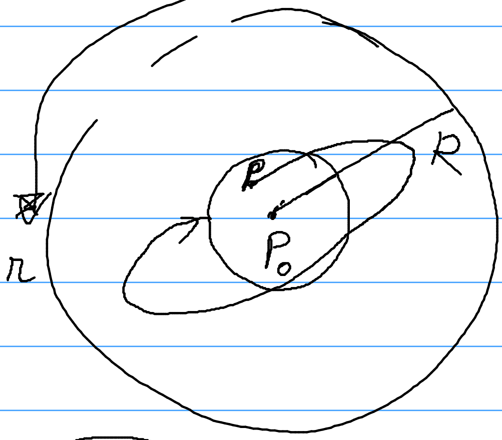
$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$\dot{P}_0$ $\qquad F(P_0) = 0$

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = P \end{cases} \quad (*) \longrightarrow \varphi_p(t)$$

Def: P_0 è STABILE (per $(*)$) se $\forall R > 0 \ \exists r > 0$ t.c.
Ogni soluzione di $(*)$ con $y(0) = p$ e $|p - P_0| < r$ è tale che

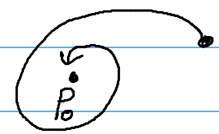
$$|y(t) - P_0| < R \quad \forall t > 0$$



P_0 asintoticamente stabile.

se è stabile e per ogni $|P - P_0| < r$

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_p(t) = P_0$$



$$\Omega_{P_0} = \{ p \in \Omega : \lim_{t \to \infty} \varphi_p(t) = P_0 \}$$

Es: se P_0 è stabile allora Ω_{P_0} è un'aperto connesso per archi

$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $\quad F(0) = 0$

Funzione di Lyapunov

$V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\quad P_0 = 0 \in \Omega$

V si dice funz. di Lyapunov per $y' = F(y)$ vicino a P_0 sse

(i) $V(0) = 0$, $\quad V(p) > 0 \quad \forall p \neq 0$

(ii) $\dot{V}(p) \leq 0 \quad \forall \; p \in \Omega$

<u>Prop</u>: Se 0 ha una funzione di Lyapunov allora 0 è un punto stabile.

Se vale (ii) $\dot{V}(p) < 0 \quad \forall \, p \in \Omega \quad p \neq 0$ allora 0 è asintoticamente stabile