Equazioni di Lyapunov

Note Title 2021-04-19

$$A^* X + XA + Q = 0 \qquad Q = Q^* \succeq 0 \qquad (L)$$

$$A, X, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Caso particolare di: Sylvester $AX - XB = C$

(L) ha sol. unica $\iff \Lambda(A^*) \cap \Lambda(-A) = \emptyset$

In particolare, se $\Lambda(A) \subseteq LHP$ (aperto), allora vale questa cond.

<u>Lemma</u>: supponiamo (L) abbia sol. unica. Allora, $X = X^*$

Dim: trasponiamo: $X^* A + A^* X^* + Q = 0 \Rightarrow$ anche X^* risolve (L)
$\Rightarrow X = X^*$

<u>Lemma</u>: supponiamo $Q \succ 0$, $X \succ 0$. Allora, $\Lambda(A) \subseteq LHP$ (aperto)

<u>dim</u>: $Av = \lambda v$

$$0 = v^*(A^* X + XA + Q)v = v^* \bar{\lambda} X v + v^* X \lambda v + v^* Q v$$

$$0 = \underbrace{(\bar{\lambda} + \lambda)}_{2\operatorname{Re}(\lambda)} \cdot v^* X v + v^* Q v \qquad 2\operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{v^* Q v}{v^* X v} < 0.$$

<u>Lemma</u>: supponiamo $\Lambda(A) \subseteq LHP$. Allora, $Q \succ 0 \Rightarrow X \succ 0$

$$Q \succeq 0 \Rightarrow X \succeq 0$$

<u>Dim</u>: Dimostriamo che $X = \int_0^\infty \underbrace{\exp(A^* t)}_{\exp(A^* t) \to 0} Q \underbrace{\exp(At)}_{\exp(At) \to 0 \text{ se } t \to \infty} dt$

$$\|X\| \leq \int_0^\infty \|\exp(A^* t) Q \exp(At)\| \, dt$$

$$\leq \int_0^\infty \|\exp(-A^*t)\|^{-1} \|Q\| \cdot \|\exp(-At)^{-1}\| \, dt \leq \int_0^\infty \|Q\| \cdot \exp(-\|-A\|)t \cdot \exp(-\|A\|t) \, dt$$

$$< \infty$$

Scriviamo

$$\frac{d}{dt} \exp(A^*t) Q \exp(At) = A^* \exp(A^*t) Q \exp(At) + \exp(A^*t) Q \exp(At) A$$

Integro da 0 a ∞

$$\exp(A^*t) Q \exp(At) \Big|_0^\infty = A^* \underbrace{\int_0^\infty \exp(A^*t) Q \exp(At) \, dt}_{= X} + \underbrace{\int_0^\infty \exp(A^*t) Q \exp(At) \, dt}_{= X} A$$

$$= 0 - Q$$

$\Rightarrow$ X soddisfa $-Q = A^*X + XA$ $\square$

Sistemi dinamici lineari: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t) = A x(t) \end{cases}$$

$x(t) = \exp(At) \cdot x_0$ $\qquad \underbrace{x(t) \to 0 \ \ \forall x_0 \in \mathbb{C}^n}_{\text{"asymptotically stable"}} \Leftrightarrow \Lambda(A) \subseteq LHP$

Computazionalmente, senza un calcolatore, verificare $\Lambda(A) \subseteq LHP$ è complicato.

Data una matrice simmetrica Q, verificare $Q \succ 0$ è più facile (criterio d'inerzia di Sylvester)

Per il lemma: se trovo $X \succ 0$ t.c. $-Q = A^*X + XA \prec 0$, allora posso concludere $\Lambda(A) \subseteq LHP \Rightarrow$ sistema asintoticamente stabile

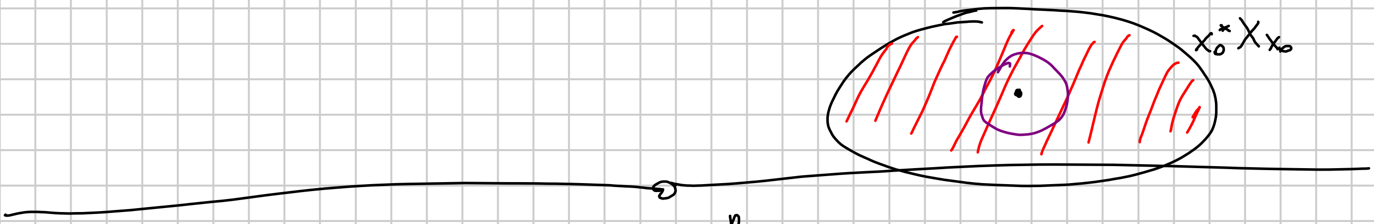
Lyapunov:

Supponete di avere $X \succ 0$ t.c. $A^*X + XA \prec 0$, allora potete definire $V(x) = x^* X x$. Calcolate lungo una traiettoria,

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} x(t)^* X x(t) = x(t)^* A^* X x(t) + x(t)^* X A x(t)$$

$$= x(t)^* (A^*X + XA) x(t) \leq \lambda_{max}(A^*X + XA) \cdot \|x(t)\|^2$$

Quindi $x(t)$ non lascia mai la regione $\{V(x) \leq V(x_0)\}$



$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{k+1} = A x_k \end{cases} \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{C}^n \qquad A \in \mathbb{C}^{n \times n} \qquad \text{soluzione: } x_k = A^k x_0$$

Il sistema è asint. stabile $\iff \Lambda(A) \subseteq \mathbb{D}$

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$$

A questo sistema dinamico associamo l'equazione matriciale

$$X - A^* X A = Q, \qquad Q \succcurlyeq 0 \qquad (S)$$ equazione di Stein

1) trovo formula risolutiva per (S): se $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{D}$, allora

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A \quad \Longleftrightarrow \quad X = \int_0^t \exp(A^* t) Q \exp(At)\, dt$$

Dim: $X = Q + A^* X A = Q + A^*(Q + A^* X A)A = Q + A^* Q A + (A^*)^2 X A^2$

$= Q + A^* Q A + (A^*)^2 (Q + A^* X A) A^2 = Q + A^* Q A + (A^*)^2 Q A^2 + \underbrace{(A^*)^3 X A^3}$

Oppure: vettorizzando, $(S) \iff \left[I - A^T \otimes A^*\right] vec(X) = vec(Q)$

$\Rightarrow vec(X) = \left[I - A^T \otimes A^*\right]^{-1} vec(Q) = \left(I + A^T \otimes A^* + (A^T \otimes A^*)^2 + (A^T \otimes A^*)^3 + \ldots\right) vec(Q)$

2) Dalla formula, si vede che $Q \succcurlyeq 0$, $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{D} \Rightarrow X \succcurlyeq 0$

3) Similmente, posso dimostrare che $X \succ 0$, $Q \succ 0 \Rightarrow \Lambda(A) \subseteq \mathbb{D}$

$Av = \lambda v$

$$v^*(X - A^* X A)v = v^* Q v$$

$$v^* X v (1 - \bar{\lambda}\lambda) = v^* Q v$$

$$1 - |\lambda|^2 = \frac{v^* Q v}{v^* X v} > 0$$

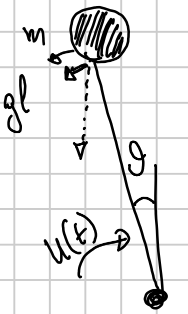
4) Posso definire un funzionale energia $V(x) = x^* X x$ e dimostrare che

(se $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{D}$, e X è stato trovato in modo da soddisfare $X \succ 0$, $X - A^* X A = Q \succ 0$)

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) = x_{k+1}^* X x_{k+1} - x_k^* X x_k = x_k^* A^* X A x_k - x_k^* X x_k$$

$$= x_k^* (-Q) x_k \leq 0$$

Pendolo rovesciato



<u>stato</u> del sistema $x = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot\vartheta \end{bmatrix}$

$$\dot x = \begin{bmatrix} \dot\vartheta \\ \ddot\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ gl \sin(x_1) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_2 \\ gl \cdot x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot x = A x \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl & 0 \end{bmatrix} \qquad eig(A) = \pm \sqrt{gl}$$

$\Rightarrow$ no parte reale negativa $\Rightarrow$ instabile

Se aggiungiamo una forza $u(t)$

$$\dot x = \begin{bmatrix} x_2 \\ gl \cdot \sin(x_1) + u(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$\dot x = Ax + Bu \qquad \begin{array}{l} u : [0, \infty) \to \mathbb{R} \\ x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2 \end{array} \qquad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

Riusciamo a scegliere $u = u(t)$ in modo da rendere stabile il sistema?

Sì, riusciamo a farlo anche con $u(t) = F x(t)$ $F \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

Difatti,

$$\dot x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl + f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

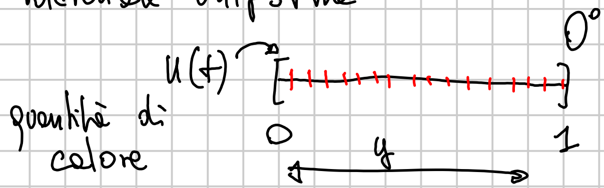
$$\dot x = Ax + Bu = Ax + BFx = (A + BF)x$$

Scegliendo opportunamente le entrate di F, riesco a ottenere una $A + BF$ con $\Lambda(A+BF) \subseteq LHP \Rightarrow \dot x = (A+BF)x$ è asint. stabile

Difatti, il pol. caratt. di $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gl+f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ è $\lambda(\lambda - f_2) - (gl + f_1)$

$$= \lambda^2 - f_2\lambda - (gl+f_1)$$

Altro esempio fisico: barra di materiale uniforme

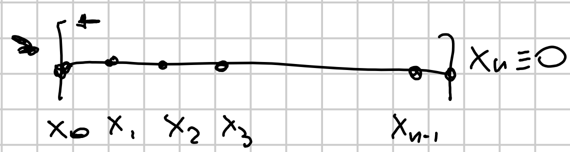


$x(y,t)$ = temperatura alla coordinata y al tempo t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} x(y,t) = \alpha \dfrac{\partial^2}{\partial^2 y} x(y,t) \\ x(0,t) = u(t) \\ x(1,t) = 0 \end{cases}$$

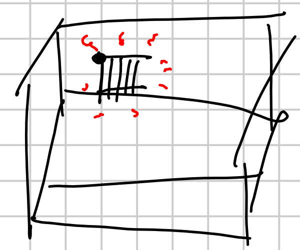
Discretizziamo con n punti equispaziati

Chiamiamo $x(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$



$$\frac{\partial}{\partial t} x_i(t) = \alpha \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{h^2}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \dot{x} = \frac{\alpha}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$



$$\rightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad \leftarrow$$

Q1: possiamo scegliere $u(t)$ in modo da controllare il sistema, cioè raggiungere (a un tempo fissato t_F) $x(t_F) = x_{t_F}$

Q2: riusciamo a stabilizzare il sistema attorno a zero, cioè scegliere $u(t)$ in modo che $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & \boxed{*} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u_1 \\ 0x_1 + a_{22}x_2 + 0 \cdot u_1 \end{bmatrix}$$

$$A+B[f_1\ f_2] = \begin{bmatrix} *+f_1* & *+f_2* \\ 0 & \boxed{*} \end{bmatrix}$$

$Q_{22}>0$

$\boxed{\text{Datta}}$ Chapter 5