LEZIONE 26

21/4/2021

ANALISI 2

DINAMICA DI POPOLAZIONI

1 POPLAZIONE: $x(t)$ = NUM. DI INDIVIDUI AL TEMPO t

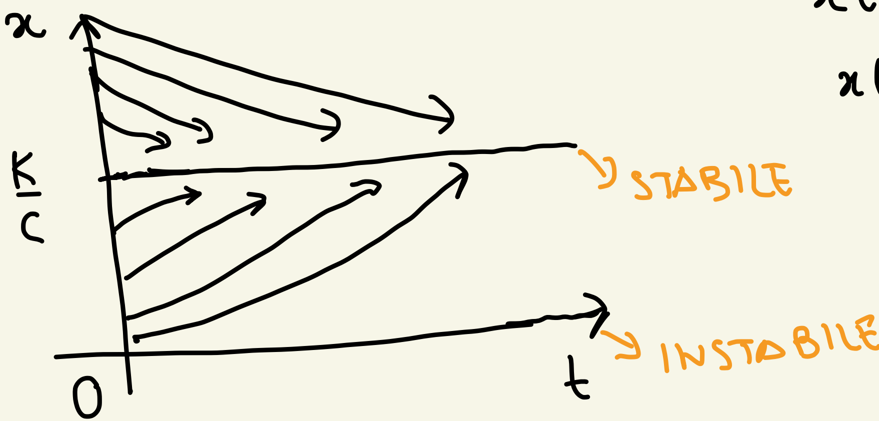
$K, c > 0$

$$\begin{cases} x'(t) = Kx - cx^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Kx → TASSO DI CRESCITA

cx^2 → SMORZAMENTO, COMPETIZIONE

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{K}{c} \\ x(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{SOL. STAZ.}$$



2 POPOLAZIONI IN COMPETIZIONE

$x(t)$, $y(t)$

$$\begin{cases} x' = (K_1 - a_{11}x - a_{12}y)\,x \\ y' = (K_2 - a_{21}x - a_{22}y)\,y \end{cases}$$

TUTTI I COEFF. SONO > 0

CRESCITA

COMPETIZIONE

SISTEMA AUTONOMO 2×2,

STUDIO QUALITATIVO

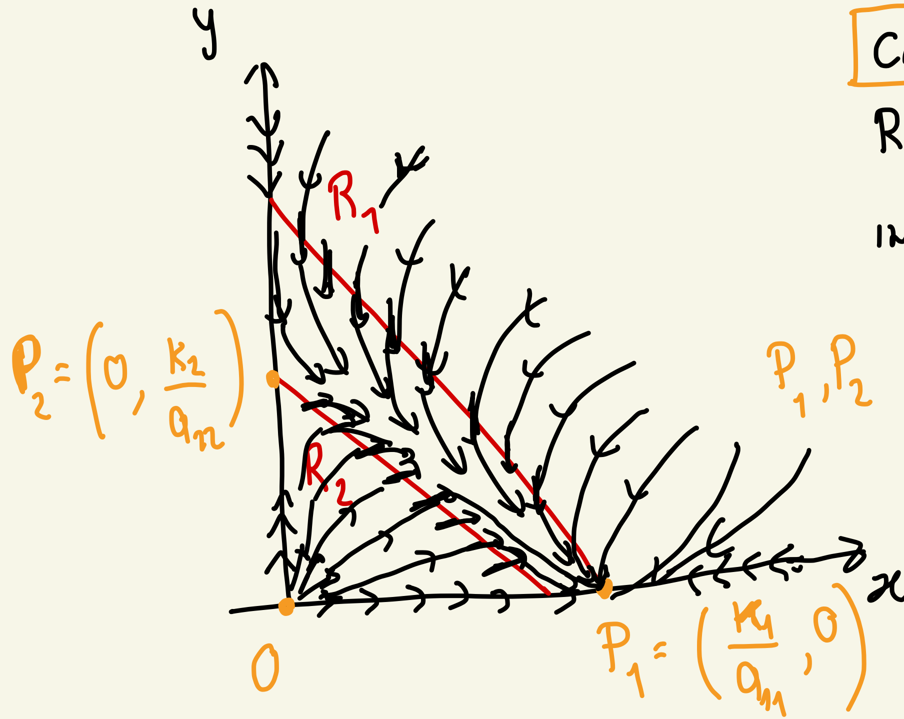
CERCHIAMO I PUNTI STAZIONARI

$$x' = 0 \iff K_1 - a_{11}x - a_{12}y = 0$$

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{K_1}{a_{12}} \quad \text{RETTA} \quad R_1$$

$$y' = 0 \iff y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{K_2}{a_{22}} \quad \text{RETTA} \quad R_2$$

CI INTERESSA IL QUADRANTE $x \geq 0$, $y \geq 0$



CASO 1

R_1 e R_2 NON SI INTERSECANO NEL QUADRANTE

PUNTI STAZIONARI P_1, P_2

O NODO INST.

P_1 NODO STAB.

P_2 SELLA

CONCLUSIONE:

TUTTE LE SOL. $\to P_1$

SOPRAVVIVE SOLO LA PRIMA POPOLAZIONE

STABILITÀ DEI PUNTI STAZIONARI

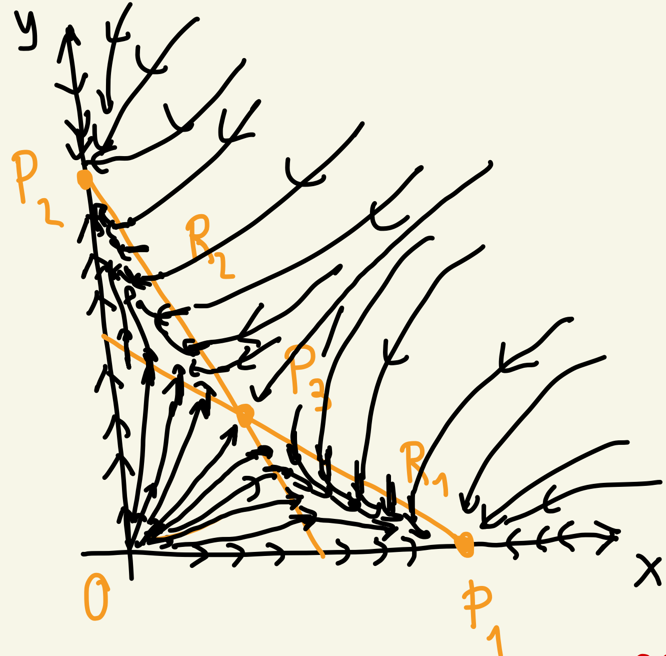
0: IL SISTEMA LINEAR. È
$$x' = K_1 x$$
$$y' = k_2 y$$

LA MATRICE JACOB. È $\begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$ NODO INSTABILE

LA MATRICE JACOB. IN UN GENERICO (x, y)

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} K_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}y & K_2 - a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{CASO 2}}$



O NODO INST.

P_1, P_2 NODI STABILI

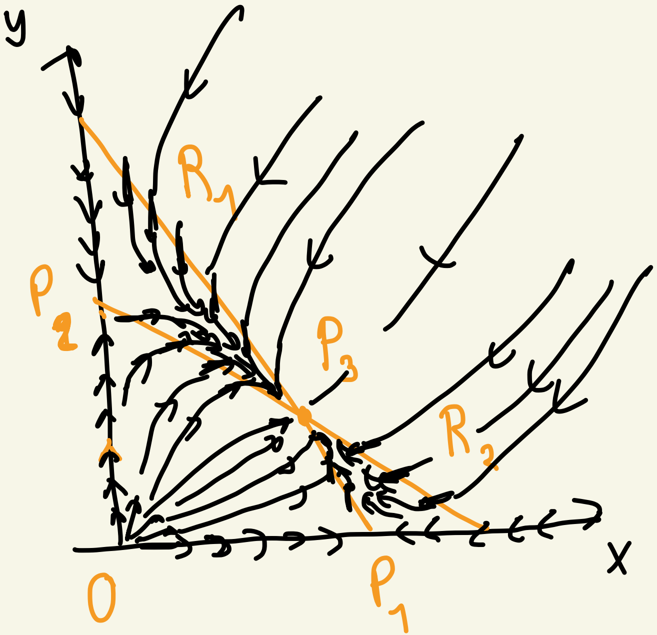
P_3 SELLA

VERIFICARE CON $J(x,y)$

CONCLUSIONE:

SOPRAVVIVE SOLO 1 POPOLAZIONE, DIPENDE DAL DATO INIZIALE (x_0, y_0)

CASO 3



O NODO INST.

P_1, P_2 SELLE

P_3 NODO STABILE

CONCLUSIONE: LE DUE POPOLAZIONI "CONVIVONO" E SI STABILIZZANO IN P_3,

$$x_0 > 0 \text{ e } y_0 > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} P_3$$

MODELLI PREDA - PREDATORE (LOTKA - VOLTERRA)

$x(t)$ PREDE $\qquad$ $y(t)$ PREDATORI

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \end{cases}$$

$x' = ax \to x(t) = x_0 e^{at}$

$y' = -cy \to y(t) = y_0 e^{-ct}$

PUNTI STAZIONARI:

$x' = 0 \iff x = 0 \quad \sigma \quad y = \frac{a}{b} > 0$

$y' = 0 \iff y = 0 \quad \sigma \quad x = \frac{c}{d} > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} O &= (0,0) \\ P &= \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \end{aligned}}$$

STABILITÀ DI O E P

$P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

O SELLA

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{TR}\, J = 0$

$\lambda^2 + ac = 0$

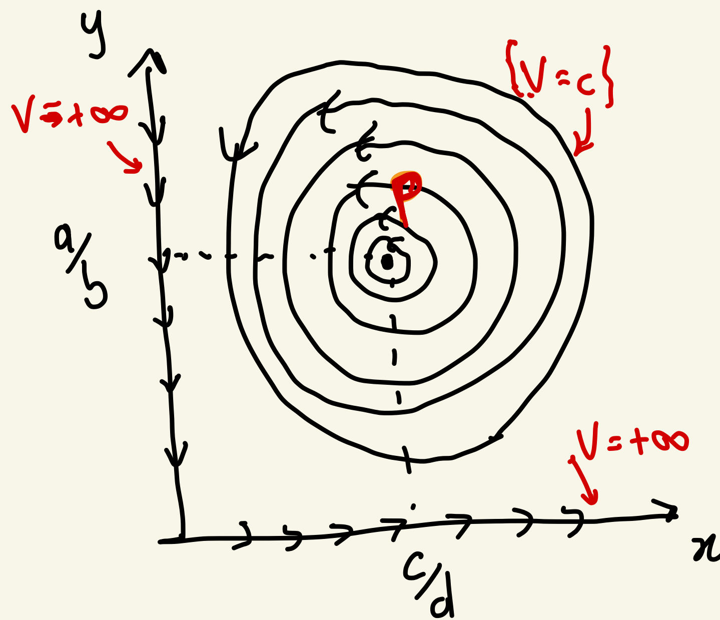
$\mathrm{DET}\, J = ac > 0$

$\lambda = \pm\sqrt{ac}\, i$

P CENTRO

OSS: IN P NON VALE IL TEO DI LINEARIZZ.,
IN P POTREMMO AVERE UN CENTRO O UN FUOCO

SE P FOSSE UN CENTRO, AVREMMO



POSSIAMO ASPETTARCI CHE IL QUADRANTE SIA FIBRATO IN ORBITE PERIODICHE DEL SISTEMA

CERCHIAMO UN INTEGRALE PRIMO, CIOÈ

$V : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ T.C.

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = 0$$

$$\frac{1}{xy}\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \nabla V(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) \frac{1}{xy}$$

$$= V_x(x,y) \frac{(a-by)x}{xy} + V_y(x,y) \frac{(-c+dx)y}{xy} = 0$$

DIVIDIAMO TUTTO PER xy E OTTENIAMO

$$V_x(x,y)\left(\frac{a}{y}-b\right)+V_y(x,y)\left(-\frac{c}{x}+d\right)=0$$

AD ESEMPIO POSSIAMO PORRE

$$V_x(x,y)=-\frac{c}{x}+d \implies V=-c\log x+dx+f(y)$$

$$V_y(x,y)=-\frac{a}{y}+b \implies V=-a\log y+by+g(x)$$

$$\implies \boxed{V(x,y)=dx+by-c\log x-a\log y}$$ È INT. PRIMO

V È COERCIVA NEL QUADRANTE, CON MINIMO IN P

$\{V=c\}$ SONO LE ORBITE DEL SISTEMA, P È UN CENTRO

VARIANTE LEGGERMENTE PIÙ REALISTICA

$$x' = (a - by - \varepsilon x)x \qquad \varepsilon, \delta \text{ POSITIVI PICCOLI}$$

$$y' = (-c + dx - \delta y)y$$

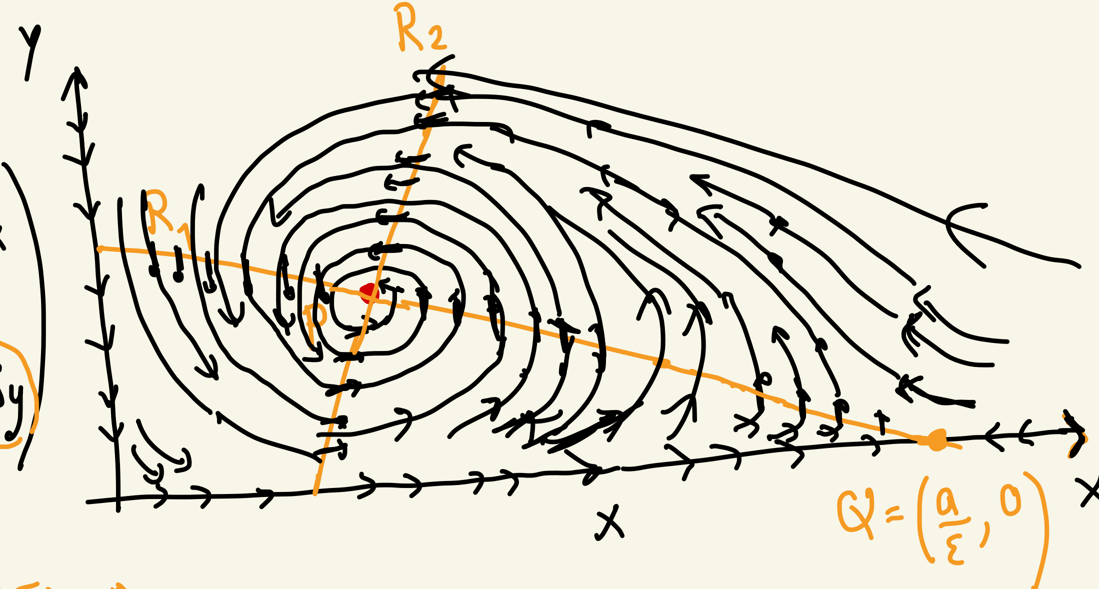
COMPETIZIONE

$x' = 0 \iff x = 0$ o $a - by - \varepsilon x = 0$ RETTA R_1

$y' = 0 \iff y = 0$ o $-c + dx - \delta y = 0$ RETTA R_2

ε, δ PICCOLI

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a - 2\varepsilon x - by & -bx \\ dy & -c + dx - 2\delta y \end{pmatrix}$$



O SELLA, Q SELLA

SI PUÒ VERIFICARE CHE $J(P)$ HA AUTOVAL. COMPLESSI CONIUGATI CON PARTE REALE NEGATIVA

$\Longrightarrow$ P È UN FUOCO STABILE, LE DUE POPOLAZIONI SI STABILIZZANO IN P

OSS: LA FUNZIONE V PRECEDENTE

$$V(x,y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

DIVENTA UNA "FUNZIONE DI LIAPUNOV" PER

IL SISTEMA, CIOÈ $\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \nabla V(x,y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) < 0$

$\{V \leq c\}$ SONO TUTTI COMPATTI INVARIANTI