LEZIONE 27

22/4/2021

ANALISI 2

MISURE DI HAUSDORFF

SONO MISURE DI BOREL IN $\mathbb{R}^n$

PENSATE PER MISURARE INSIEMI "K-DIMENSIONALI".

DEF: $K \in [0,n]$. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ INSIEME.

$$\mathcal{H}^K(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^K_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^K_\delta(A)$$

MISURA DI H. K-DIM.

PREMISURE DI H. K-DIM.

DOVE $$\mathcal{H}^K_\delta(A) = \frac{\omega_K}{2^K} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_i)^K : \operatorname{diam}(E_i) < \delta \ \forall i, \ \bigcup_i E_i \supseteq A \right\}.$$

MISURA PALLA UNITARIA IN $\mathbb{R}^K$

RICORDIAMO $\operatorname{diam}(E) = \sup_{x,y\in E} |x-y|$

OSS: $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \mathcal{H}^k_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^k_{\delta_2}(A)$

OSS: SI PUÒ DARE LA DEFINIZIONE SUPPONENDO CHE GLI E_i SIANO PALLE IN $\mathbb{R}^n$

SI OTTIENE $S^k(A) \geq \mathcal{H}^k(A)$

MISURA DI HAUSDORFF SFERICA

TEOREMA:

1. $\mathcal{H}^k$ è una misura di Borel, cioè
   $\mathcal{H}^k$ è una misura esterna e $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$
2. $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti, $\mathcal{H}^0(A) = \# A$,
   e $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}$
3. $k > k'$ $\quad \mathcal{H}^k(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(A) = +\infty$
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è C-Lipschitz $\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(A)) \leq C^k \mathcal{H}^k(A)$

DIM (IDEA)

1 ⊙ VERIFICA CHE $\mathcal{H}^k_\delta$, E QUINDI $\mathcal{H}^k$,

È UNA MISURA ESTERNA, CIOÈ

È MONOTONA PER $\subseteq$ E σ- SUBADDITIVA

⊙ $\mathcal{H}^k$ È ADDITIVA SUI DISTANTI, CIOÈ

$$\mathrm{dist}(A,B) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^k_\delta(A\cup B) = \mathcal{H}^k_\delta(A) + \mathcal{H}^k_\delta(B)$$

$$\delta < \frac{\mathrm{dist}(A,B)}{2}$$

⊙ DA QUESTO SEGUE CHE

$$\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(A\cap B) + \mathcal{H}^k(A\setminus B) \quad \forall\, B \text{ BOREL} \quad \left(\begin{array}{l}\text{BASTA}\\ B \text{ CHIUSO}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \times \text{ CARATHEODORY}$$

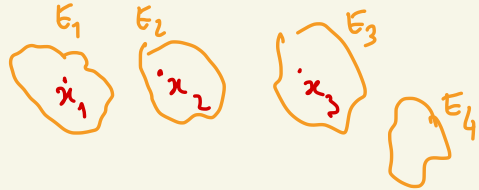
② $H^0(A) = \# A$

$\omega_0 = 1$

⊙ $A = \{x_1, \dots x_N\}$ $\qquad \delta < \min \dfrac{|x_i - x_j|}{2}$

$$\mathcal{H}^0_\delta(A) = \inf\left\{\sum_i 1 : \operatorname{diam}(E_i) < \delta,\ A \subseteq \bigcup E_i\right\}$$

$$= N = \# A$$



⊙ $\# A = +\infty \Longrightarrow$

$$\mathcal{H}^0(A) = \sup_{A' \subseteq A} \mathcal{H}^0(A') = +\infty$$

(MONOTONIA)

2) $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}$ È UN PO' PIÙ COMPLICATO (NON LA FACCIANO)

3) $$\underset{\substack{\vee\\0}}{\mathcal{H}^k_\delta(A)} = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_i \operatorname{diam}(E_i)^k : \operatorname{diam}(E_i) < \delta,\ \bigcup E_i \supseteq A \right\}$$

$$\operatorname{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \operatorname{diam}(E_i)^{k'}$$

$$\sum \operatorname{diam}(E_i)^k < \delta^{k-k'} \sum \operatorname{diam}(E_i)^{k'}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k_\delta(A) < \Big(\underbrace{\frac{\omega_k}{2^k} \cdot \frac{2^{k'}}{\omega_{k'}}}_{C_k} \Big) \underbrace{\delta^{k-k'}}_{\to 0 \text{ per } \delta \to 0} \mathcal{H}^{k'}_\delta(A)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^{k'}_\delta(A) > \frac{1}{C_k} \delta^{k'-k} \mathcal{H}^k_\delta(A) \xRightarrow[\delta \to 0]{} \mathcal{H}^{k'}(A) = +\infty$$

OSS: VICEVERSA $\mathcal{H}^k(A) < +\infty \Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(A) = 0 \quad \forall k' > k$

CIOÈ $\mathcal{H}^k(A)$ PUÒ ESSERE $\neq 0$ PER UN SOLO k

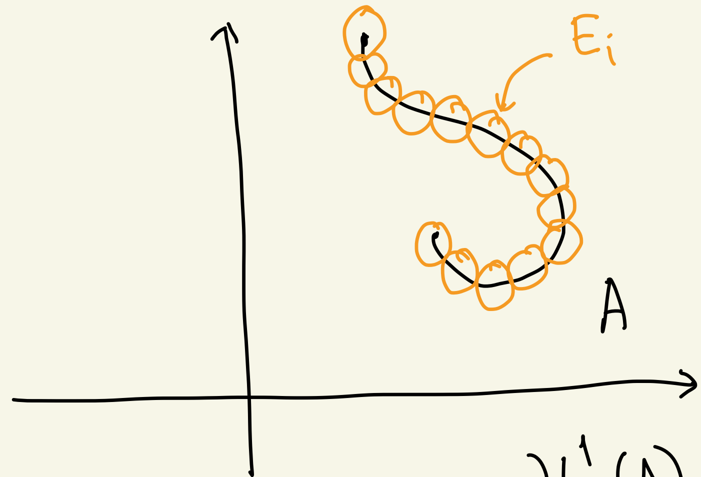
4) E_i RICOPRIMENTO DI $A \Rightarrow$

$f(E_i)$ RICOPRIMENTO DI $f(A)$

E SI HA $\operatorname{diam}(f(E_i)) \leq C \cdot \operatorname{diam}(E_i)$

$$\sum_i \operatorname{diam}(f(E_i))^k \leq C^k \sum_i \operatorname{diam}(E_i)^k$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^k(f(A)) \leq C^k \mathcal{H}^k(A).$$



$n=2$

$k=1$

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) = \sum_i \operatorname{diam}(E_i)$$

ESERCIZIO: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ CURVA REGOLARE INIETTIVA

$$\Rightarrow \mathcal{H}^1(\gamma([a,b])) = L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

OSS: $\mathcal{H}^k$, con $k<n$, non è finita sui compatti, cioè non è di Radon,

e non è σ-finita,

cioè non si può scrivere $\mathbb{R}^n$

come unione numerabile di insiemi

di misura finita,

inoltre $\mathcal{H}^k(A) = +\infty \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

SE E È UN BORELIANO, σ-FINITO PER $\mathcal{H}^k$,

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^k|_E$ È UNA MISURA DI BOREL σ-FINITA,

POSSIAMO DEFINIRE

$$\int_E f \, d\mathcal{H}^k \overset{\text{DEF}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mathcal{H}^k|_E$$

ES: $\displaystyle\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| = \int_{\gamma([a,b])} f \, d\mathcal{H}^1$

DINENSIONE DI HAUSORFF

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad \dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{k \geq 0 \text{ T.C. } \mathcal{H}^k(E) = 0\}$

PONIANO $\mathcal{H}^k(E) = 0 \;\; \forall k > n$

OSS: E HA DIM. $K \Rightarrow$

$\mathcal{H}^j(E) = 0 \;\; \forall j > K$ E $\mathcal{H}^j(E) = +\infty \;\; \forall j < K$

$(\mathcal{H}^k(E) \in [0, +\infty])$

OSS: $L < \mathbb{R}^n$ SP. AFFINE K-DIM. $\Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(L) = K$

DOMANDA: $\exists$ INSIEMI CON $\dim_{\mathcal{H}}(E) \notin \mathbb{N}$

SÌ, INSIEMI FRATTALI:

SIANO $S_1 \dots S_N$ SIMILITUDINI DI $\mathbb{R}^n$

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ È INVARIANTE SE $E = \bigcup_i S_i(E)$

AD ES. $K \subseteq [0,1]$ CANTOR VERIFICA

$$K = \underbrace{\frac{1}{3}K}_{S_1(K)} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K\right]}_{S_2(K)}$$

SIA $\alpha = \dim_{\mathcal{H}}(E)$ E SUPP. CHE $\mathcal{H}^\alpha(E) \neq \{0, +\infty\}$

NON LO DIMOSTRIAMO

$$\Rightarrow \mathcal{H}^\alpha(E) = \sum_i \mathcal{H}^\alpha(S_i(E)) = \sum_i \lambda_i^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$$

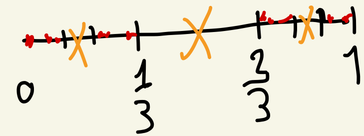
DOVE $S_i(E) = T_i(\lambda_i(E))$ T_i ISOMETRIA DI $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \cancel{\mathcal{H}^\alpha(E)} = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^\alpha\right) \cancel{\mathcal{H}^\alpha(E)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^N \lambda_i^\alpha = 1}$$ DETERMINA LA DIM. α DI E

ES: $K = \frac{1}{3} K \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} K \right)$

CANTOR



$N = 2 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$

$2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\alpha} = 1 \implies 3^{\alpha} = 2$

$$\boxed{\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}} \in (0,1)$$

OSS: ESEMPI ANALOGHI IN $\mathbb{R}^n$, AD ES. LA CURVA DI KOCH IN $\mathbb{R}^2$

ETC...