Note Title 2021-04-22

Teoria dei controlli: (lineare)

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$x:[0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ "stato" $u:[0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ "input"

Q1: riusciamo a rendere il sistema stabile attorno a 0, cioè a scegliere $u(t) = Fx(t)$ in modo che $A+BF$ sia stabile, cioè $\Lambda(A+BF) \subset LHP$ e quindi $\dot{x} = Ax+Bu = (A+BF)x$

Q2: riusciamo a controllare il sistema, cioè, dati $t_F > 0$, $x_F \in \mathbb{R}^n$, scegliere la funzione $u(t)$ in modo che $x(t_F) = x_F$

Non sempre possibile:

(1) $$A = \underbrace{V\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} V^{-1}}, \quad B = \underbrace{V\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + 0\cdot u(t)$$

$$\dot{x} = V\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} V^{-1}x(t) + V\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

se cambiate variabile $w(t) = V^{-1}x(t)$

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Cosa c'è dietro: spazi di Krylov: $B, AB, A^2B, A^3B, \dots$, per A, B nella forma (1), stanno tutti in $\operatorname{span}\left(V\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

Def: la coppia $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ si dice <u>controllabile</u> se

$$K(A,B) = \operatorname{span}\left(B, AB, A^2B, A^3B, \dots A^kB, \dots\right) = \mathbb{R}^n$$

Notare che è sufficiente fermarsi a $A^{n-1}B$, perché A^n è una comb. lineare di $I, A, A^2, \dots A^{n-1}$ e quindi $A^nB \subseteq \operatorname{span}(A^{n-1}B, A^{n-2}B, \dots AB, B)$.

(Cayley-Hamilton)

Lemma: esiste $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile tale che

$$(*)\qquad M^{-1}AM=\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}}\end{array}\qquad M^{-1}B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2\end{array}\end{array}$$

(con $A_{11}\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $B_1\in\mathbb{R}^{n_1\times m}$) e $n_2\neq 0$

se e solo se (A,B) non è controllabile

Dim: esiste decomp. $(*)$ $\Rightarrow$ (A,B) non controllabile, cioè $\operatorname{span}(B,AB,A^2B,\dots)\neq\mathbb{R}^n$

Dividiamo $M=\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{[M_1 \;\; M_2]} \\ n_1 & n_2\end{array}$; allora

$$A^kB=\left(M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}M^{-1}\right)^k M\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix} A_{11}^k & * \\ 0 & A_{22}^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} M_1 & M_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^kB \\ 0\end{bmatrix}=M_1A_{11}^kB\subseteq \operatorname{Im}(M_1).$$

$\operatorname{span}(B,AB,\dots)\neq\mathbb{R}^n\Rightarrow$ esiste decomposiz. $(*)$

Siano le colonne di M_1 una base di $\operatorname{span}(B,AB,\dots)$, e completiamole a $M=[M_1 M_2]$

Allora, $B=M_1\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}$ perché le colonne di B stanno in $\operatorname{Im}(M_1)$.

In più, M_1 è A-invariante, cioè $AM_1\subseteq M_1$: infatti, $Av\in\operatorname{span}(B,AB,\dots)$ ogni volta che $v\in\operatorname{span}(B,AB,\dots)$

$$v=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n\end{bmatrix}\Rightarrow Av=\begin{bmatrix} AB & A^2B & \cdots & A^nB\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n\end{bmatrix}\in K(A,B).$$

$$M_1\ A\text{-invariante}\Rightarrow A\begin{bmatrix} M_1 & M_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1 & M_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & *\end{bmatrix}.$$

Oss: $\operatorname{Im} f(A)B\subseteq \operatorname{Im} M_1$, perché $f(A)B=p(A)B$ per qualche polinomio

---

Cor: Kalman decomposition:

Per ogni (A,B), esiste un cambio di base M t.c.

$$M^{-1}AM=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\qquad M^{-1}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}$$ con (A_{11},B_1) che invece è controllabile.

dim: prendiamo M_1 t.c. le sue colonne siano una base di $\operatorname{Im}[B,AB,A^2B,\dots]$, e completiamolo

---

Teo: (test di Hautus, o di Popov):

(A,B) controllabile $\iff \operatorname{rank}[A-zI \,\vdots\, B] = n$ per tutti gli $z \in \mathbb{C}$

$\iff \operatorname{rank}[A-zI \,\vdots\, B] = n$ per tutti gli $z \in \Lambda(A)$

(perché se $z \notin \Lambda(A)$, $\operatorname{rank}[A-zI]$ è già n)

<u>Dim:</u> $\Leftarrow$, cioè: se $A = M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1}$, $B = M\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora $\operatorname{rank}[A-zI, B] \neq n$ per qualche $z \in \Lambda(A)$:

difatti, $[A-zI, B] = M\left[\begin{bmatrix} A_{11}-zI & A_{12} \\ 0 & A_{22}-zI \end{bmatrix} M^{-1} \,\vdots\, \begin{matrix} B_1 \\ 0 \end{matrix}\right]$ ha le n_2 righe inferiori di rango $< n_2$ se $z \in \Lambda(A_{22})$

$\Rightarrow$) supponiamo che esista w tale che $w^*[A-zI \,\vdots\, B] = 0$ per qualche $z \in \mathbb{C}^n$.

Allora, possiamo supporre (a meno di cambi di base) $w = e_n$. Questo implica

$$[0 \,\vdots\, 1]B = 0 \Rightarrow B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \quad e \quad A-zI = \left[\begin{array}{cc} * & * \\ \hline & 0 \end{array}\right] \quad A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n-1 & \quad 1 \end{matrix} & \end{array}$$

<u>Teo:</u> (A,B) controllabile se e solo se

$$W = \int_0^t \exp(\tau A) B B^* \exp(\tau A^*)\, d\tau \succ 0$$

è pos. definito per ogni $t > 0$, o, equivalentemente, per <u>un</u> $t > 0$

<u>dim:</u> $\Leftarrow$ (A,B) non controll.; allora, $\exp(\tau A)B \subseteq \operatorname{Im} M_1$, un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$: in una base opportuna, $\exp(\tau A)B = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$ ← zeri in fondo sempre

per ogni τ $\Rightarrow W = \int_0^t \exp(\tau A) B B^* \exp(\tau A^*) = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow$ supponiamo che esista $t > 0$ t.c. $W = \int_0^t \exp(\tau A) B B^* \exp(\tau A^*)\, d\tau$ <u>non</u> è definito positivo, cioè esiste un certo $z \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$z^* W z = \int_0^t \underbrace{z^* \exp(\tau A) B B^* \exp(\tau A^*) z}_{\| z^* \exp(\tau A) B \|}\, d\tau = 0$$

Allora, $\phi(t) = z^* \exp(\tau A) B$ è tale che $\phi(\tau) \equiv 0$ per $\tau \in [0, t]$

$\phi(0) = z^* B = 0 \qquad \phi'(0) = z^* A B = 0 \qquad \phi''(0) = z^* A^2 B = 0 \quad \dots$

$\Rightarrow \; z^*[B \;\; AB \;\; A^2B \cdots A^{n-1}B] = 0 \quad \Rightarrow (A,B)$ non controllabile. $\square$

<u>Corollario</u>: dati (A,B) con $\Lambda(A) \subset LHP$, allora la soluzione dell'eq. di Lyapunov $AW + WA^* + BB^* = 0$, cioè $W = \int_0^\infty \exp(\tau A) B B^* \exp(\tau A^*) d\tau$, è def. positiva se e solo se (A,B) controllabile.

<u>Teo</u>: (A,B) è controllabile se e solo se per ogni scelta di $t_F > 0$, $x_F \in \mathbb{R}^n$, posso trovare un "controllo" $u(t)$ tale che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{soddisfi} \quad x(t_F) = x_F$$

<u>Dim</u>: $\Leftarrow$ se (A,B) <u>non</u> è controllabile, allora non posso raggiungere tutti gli stati:

Se (A,B) non è controllabile, allora esiste $\mathrm{Im} M_1 = K(A,B) = \mathrm{Im}[B, AB, A^2B, \ldots]$.

e se $x_0 \in K(A,B)$, allora $x(t) \in K(A,B)$ per ogni $t \in [0, \infty)$

se esiste $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ tale che $z^*[B \;\; AB \;\; A^2B \ldots] = 0$, allora

$$z^* x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^* \dot{x} = \underbrace{z^* A}_{0} x(t) + \underbrace{z^* B}_{0} u(t)$$

$\Rightarrow$ se (A,B) controllabile, allora riesco a raggiungere tutti gli stati:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$x(t_F) = \exp(At_F) x_0 + \int_0^{t_F} \exp(A(t_F - \tau)) B u(\tau) d\tau$$

Scegliamo $u(t) = B^* \exp(A^*(t_F - t)) y$ per un $y \in \mathbb{R}^n$ (indeterminato)

$$x(t_F) = \exp(At_F) x_0 + \underbrace{\int_0^{t_F} \exp(A(t_F - \tau)) BB^* \exp(A^*(t_F - \tau)) d\tau}_{W > 0} \, y$$

Scegliendo $y = W^{-1}(x_F - \exp(At_F) x_0)$, viene $x(t_F) = x_F$

Qualche volta, riusciamo a rendere il sist. stabile (cioè $\lim_{t \to \infty} x(t) \to 0$) anche se non è controllabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \dot{x}_2 = A_{22} x_2 + 0 \cdot u \quad \text{se } \Lambda(A_{22}) \subset LHP,$$

$$\lim_{t \to \infty} x_2(t) = 0$$

Def: date (A,B), sia la loro decomp. di Kalman

$$A = M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{con } (A_{11}, B_1) \text{ controllabile}$$

Se $\Lambda(A_{22}) \subset LHP$, allora (A,B) si dice <u>stabilizzabile</u>

Hautus test: (A,B) stabilizzabile $\iff$ $\operatorname{rank}[A - zI, B] = n \quad \forall z \notin LHP$

Come testare controllabilità numericamente?

1) calcolo $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\} = \Lambda(A)$ e testo se $\operatorname{rank}[A - \lambda_i I, B] = n$ per ogni i $\Rightarrow n \times SVD$

2) se $\Lambda(A) \subset LHP$, allora posso risolvere $AW + WA^* + BB^* = 0$ (in $O(n^3)$) e testare se $W \succ 0$

trucco per applicare (2) anche su A non stabili:

$$K(A,B) = \operatorname{Im}[B, AB, A^2B, \dots]$$
$$\shortparallel$$
$$K(A - \alpha I, B) = \operatorname{Im}[B, AB, A^2B, \dots] \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{C} \text{: infatti, } \forall k,$$

$$(A - \alpha I)^k B = A^k B - \binom{k}{1}\alpha A^{k-1}B + \binom{k}{2}\alpha^2 A^{k-2}B + \dots \in K(A,B)$$

Rossino lezione: martedì 9-11