23 apr 2021

$y' = F(y)$

$F \in C^1$

$F(0) = 0 \leftarrow$ 0 è un critico

$F(x) = \underbrace{DF(0)x}_{} + R(x)$

$= Ax + o(x)$

per $x \to 0$

$\boxed{\lambda_i \text{ autoval di } A}$

	Caso lineare	Caso non-lineare
	$y' = Ax$	$y' = Ax + R(x)$ con $R(x) = o(x)$
se $Re(\lambda_i) < 0$ $\forall i$	asintotic. stabile	asintoticamente stabile
(A) se $Re(\lambda_i) \leq 0$ $\forall i$ e $Re(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i$ autoval sempl	sist è stabile ma non asint. stabile	
Altri casi (B)	instabile	
se $\exists i_0$: $Re(\lambda_{i_0}) > 0$	sist. instabile	sist instabile

$A = M \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_e) M^{-1}$ dove $J_1 \dots J_e$ sono blocchi di Jordan

$e^{tA} = M \operatorname{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_e}) M^{-1}$

nel caso (A) se $Re(\lambda_k) < 0$ $\|e^{tJ_k}\| \longrightarrow 0$ $t \to +\infty$

$$\lambda_k = i\beta$$

se $Re(\lambda_k) = 0$ e λ_k autov. semplice — il blocco di Jordan è Reale

$$J^0 = I$$

$$J = \beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = -\beta^2 I$$

$$J^3 = -\beta^3 J$$

$$J^4 = \beta^4 I$$

$$e^{tJ} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k J^k}{k!} = \sum_{k \text{ pari}} * + \sum_{k \text{ dispari}} *$$

$$\sum_{k \text{ pari}} * \underset{k=2j}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2j} t^{2j} (-I)^j}{(2j)!} = \cos\beta t \; I = \begin{pmatrix} \cos\beta t & 0 \\ 0 & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k \text{ dispari}} \underset{k=2j+1}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j+1} (J)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin\beta t \; J/\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{2j+1} = (-1)^j \beta^{2j+1} J/\beta$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

---

negli altri casi: $\begin{cases} Re(\lambda_i) \leq 0 \\ \text{e } \exists\, k_0 \text{ t.c.} \end{cases}$ $Re(\lambda_{k_0}) = 0$ ma λ_{k_0} non è autoval semplice

$(\lambda_{k_0} = i\beta)$

$$\Rightarrow \quad J_{k_0} = \begin{pmatrix} i\beta & \ddots & 1 \\ & \ddots & \\ & & i\beta \end{pmatrix} = i\beta I + N$$

$$e^{J_{k_0} t} = \quad \ldots \quad e^{it\beta}\, e^{itN}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ha componenti che vanno a $+\infty$ $t \to +\infty$

$\Rightarrow$ non c'è stab. su questa componente.

<u>OSS</u>: nel caso (A) il sist. non è asintotic. stabile perché se v è un autovettore relativo all' autoval $\lambda_{k_0} = i\beta$

$$e^{tA} v \not\longrightarrow 0$$

<u>Attenzione</u>: nei casi (A) e (B) il sist. non lineare può avere comp differente

$$\begin{cases} x' = -y - kx(x^2+y^2) \\ y' = x \underbrace{- ky(x^2+y^2)}_{o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} \end{cases}$$

il sist. linearizzato $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ ha un centro

è asintoticamente stabile, infatti $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è una funz di Lyapunov

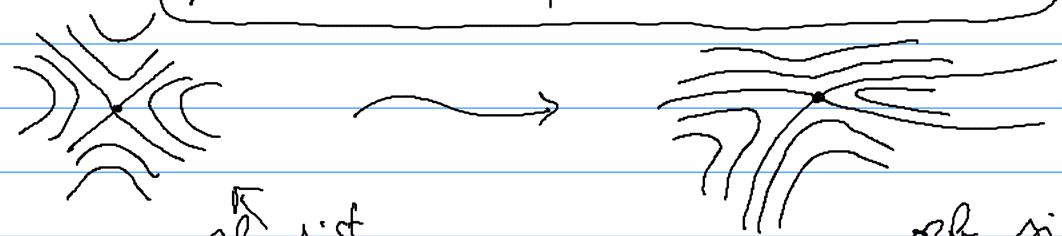
$\dot{V} < 0$

$$\dot V = \nabla V \cdot F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y - k\,x(x^2+y^2) \\ x - k\,y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = -k\,(x^2+y^2)^2 < 0$$

pertanto 0 è asintotic. stabile se $k > 0$

0 è instabile se $k < 0$

Nel caso di sist. 2x2 si può mostrare che il ritratto di fase è stabile per nodi, selle, fuochi
ma può variare, negli altri casi (centro, nodo a stella)
passando al probl. non lineare



Esempio:

$$\begin{cases} x' = -x - \dfrac{y}{\log r^2} \\ y' = -y + \dfrac{x}{\log r^2} \end{cases} \quad (*)$$

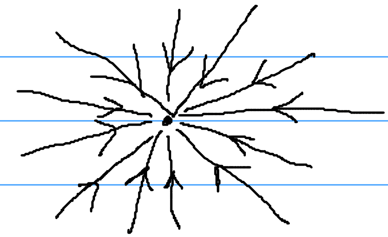
$f(x,y)$, $g(x,y)$

$r^2 = x^2 + y^2$

$B = \{x^2+y^2 < 1\}$

f, g si estendono in maniera C^1 su B

Il sist. linearizzato è $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ ha un "centro a stella"



Le orbite ~~del~~ sis. di partenza si comportano diversam.:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos\vartheta(t) \\ \sin\vartheta(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r'(t) \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \vartheta' \overset{(*)}{=} -r \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} + \frac{r}{\log r^2} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r' = -r \\ \vartheta' = \dfrac{1}{\log r^2} \end{cases} \qquad r(t) = r_0 e^{-t} \qquad (r_0 < 1)$$

$$\vartheta' = \frac{1}{2(\log r_0 - t)} = -\frac{1}{c+2t} \qquad \text{con } c = 2\log\frac{1}{r_0}$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}\log(c+2t) + \vartheta_0$$

$$\lim_{t\to\infty} \vartheta(t) = -\infty$$

— o —

$F(x,y)=0$

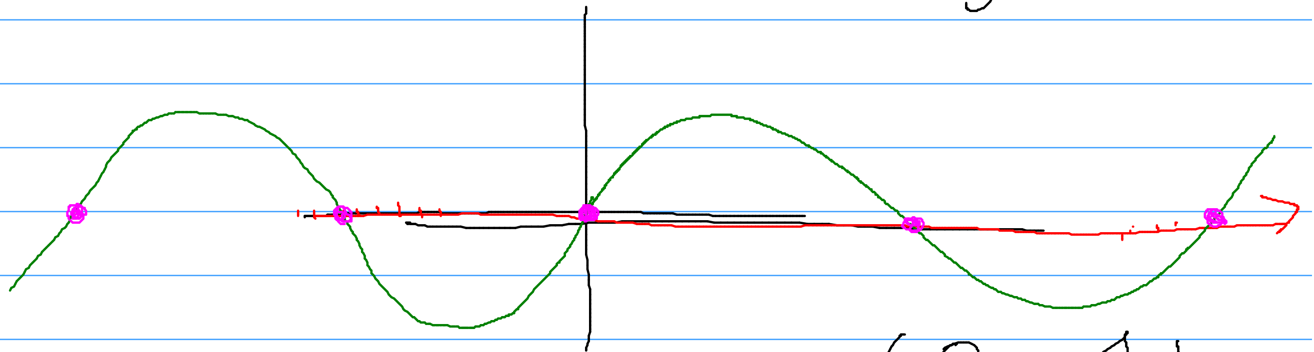
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \sin x - y \end{cases}$$

determinare punti critici e stud la stabilità

$y=0$

Punti critici

$P_k = (k\pi, 0)$



$$DF(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(k\pi) & -1 \end{pmatrix}$$

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos x & -1 \end{pmatrix}$$

$\cos(k\pi) = (-1)^k$

se k è pari

$$DF(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det DF(P_k) = -1 \Rightarrow$ autov. di segno opposto

punto di sella

se k è dispari $DF(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha det. positivo

$$\det\left(DF(P_k)-\lambda I\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+\lambda+1$$

$\Delta < 0$

autovalori complessi coniugati $\lambda_\pm = \alpha \pm i\beta$

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Parte reale $= -\frac{1}{2} \Rightarrow P_k$ è stabili se k dispari ("fuochi stabili")

Es: Trovare i punti critici e stabilirne la natura per $\begin{cases} x' = -x+y^2 \\ y' = y^2-2y \end{cases}$

Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $y\,g(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$

Allora $y \equiv 0$ è soluz. $\quad y''+y'+g(y) = 0 \quad (E)$

studiare la stabilità di questa soluzione.

OSS$_1$: g cambia segno in un int. di $0 \xRightarrow{\text{continuità}} g(0)=0$

$y(t) \equiv 0$ è sol di (E) ovvio

$F(y,p)$

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -p-g(y) \end{cases}$$

$$DF(y,p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(y) & -1 \end{pmatrix} \qquad DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -1 \end{pmatrix}$$

oss: $g'(0)$ potrebbe essere 0 (p. es $g(y) = y^3$)

$$G(y) = \int_0^y g(s)\,ds$$

oss G ha un minimo in 0 — $G'(y) > 0$ $y > 0$; $G'(y) < 0$ $y < 0$

$$V(p,y) = \frac{1}{2}p^2 + G(y)$$

soddisfa $\dot V < 0$

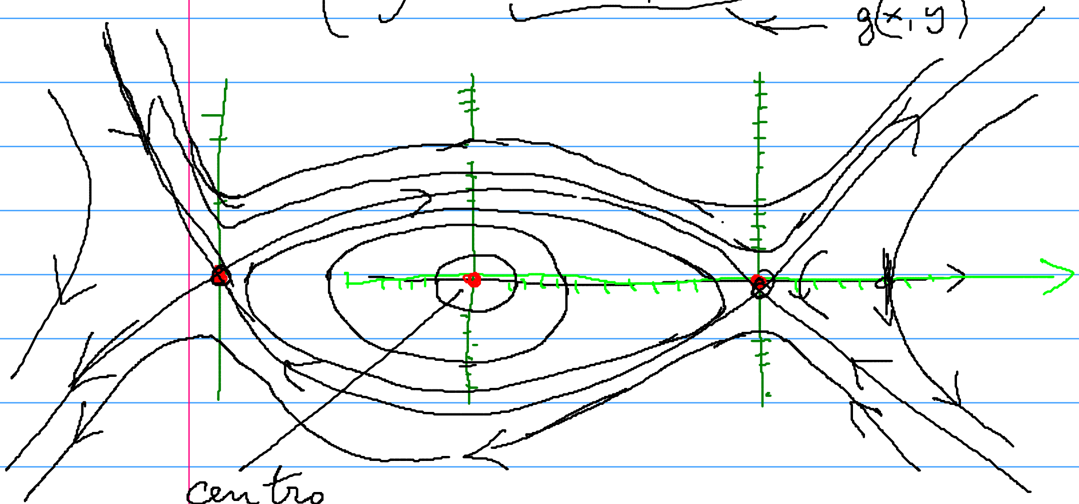
$$\dot V = \nabla V \cdot F = \begin{pmatrix} g(y) \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ -p - g(y) \end{pmatrix} = \cancel{pg} - p^2 - \cancel{pg} < 0$$

$\Rightarrow$ 0 è asint. stabile e il bacino di attrazione è $\mathbb{R}^2$ dato che $\dot V < 0$ vale su tutto $\mathbb{R}^2$.

$f(x,y)$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \underbrace{-x+x^3}_{g(x,y)} \end{cases}$$

- individuare e classificare i punti critici
- descrivere qualitativamente le ~~curve~~ orbite integrali



centro

$g\,dx - f\,dy$ è esatta

$\Rightarrow \exists\, U(x,y) : \quad U_x = g \qquad U_y = -f$

e U è costante sulle traiettorie

$$U(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

le orbite integrali saranno descritte implicitamente da $U(x,y) = c$

$U(x,y) = -\frac{1}{4}$ si descrivono esplicitamente

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{4} \rightsquigarrow \frac{1}{4}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = \frac{y^2}{2}$$

$$\{\sqrt{2}y = x^2 - 1 \ \cup\ \sqrt{2}y = 1 - x^2\} \longleftrightarrow (x^2-1)^2 = 2y^2 \leftarrow |\sqrt{2}y| = |x^2-1|$$

<u>Esercizio</u> Determinare esplicitamente le soluzioni di

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2 = \cos t \\ y_2' - 2y_1 = \sin t \end{cases} \quad b(t)$$

Sugg: usare il metodo di variazione delle costanti

$$y(t) = e^{tA} c(t)$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds + e^{tA} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$