$\boxed{16 \text{ apr } 2021}$

$U_x dx + U_y dy$

$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ è esatto $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $g\,dx - f\,dy$ è esatta

$\Downarrow$

$\exists U$ è un int. primo

$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx - ay \end{cases}$

il sist. è esatto e posso calc il pot

$\underbrace{(cx+dy)}_{}^{U_x} dx - (ax+by)\,dy$ è esatta?

$d = -a$

$\boxed{a+d=0}$

$U_x = cx - ay \implies U = c\frac{x^2}{2} - axy + u(y)$

$U_y = \quad -ax + u'(y) = -ax + by$

$u(y) = \frac{by^2}{2}$

$$\boxed{U = c\frac{x^2}{2} - axy + \frac{by^2}{2}}$$

invariante integrale per il sist.

$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$

$\{ \overbrace{5x^2 - 2xy + y^2}^{2U(x,y)} = \text{cost} \}$

——— o ———

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $\quad \begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = p \end{cases}$ $\leftarrow$ $\boxed{y(t) = \varphi_p(t)}$ $\quad p \in \Omega$

$P_0 \in \Omega$ è singolare se $\boxed{F(P_0) = 0}$

Pb: studio delle sol del sistema "vicino" a P_0

P_0 stabile (critico) se $\forall R > 0 \ \exists r > 0$ t.c. se $|p - P_0| < r$ allora $|\varphi_p(t) - P_0| < R \quad \forall t > 0$

P_0 asint. stabile se P_0 stabile e $\exists r_0 > 0$ $\lim_{t \to \infty} \varphi_p(t) = P_0 \quad \forall p \in B_{r_0}(P_0)$

Oss: Se P_0 è stabile allora $\exists r > 0 : \forall p : |p - P_0| < r$ φ_p è def su $[0, +\infty)$

— o —

Se P_0 è asintoticamente stab. $\Omega_{P_0} \doteq \{ p \in \Omega : \lim_{t \to \infty} \varphi_p(t) = P_0 \}$

bacino di attr. $\quad$ è un intorno di P_0 $\quad (\Omega_{P_0} \neq \emptyset)$

Ω_{P_0} è aperto

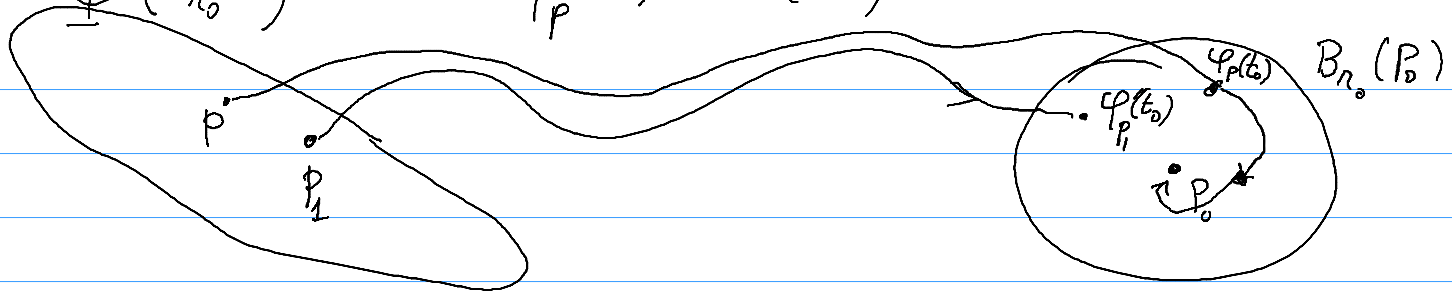
$p_1 \in \Omega_{P_0} \Longrightarrow \exists t_0 : \varphi_{p_1}(t_0) \in B_{r_0}(P_0)$ $\quad \Phi : p \longmapsto \varphi_p(t_0)$

è continua in p

dip cont. da cond iniz.

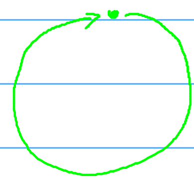
$p_1 \in \Phi^{-1}(B_{r_0}(P_0))$ è aperto

$P \in \Phi^{-1}(B_{r_0}(P_0)) \Longrightarrow \varphi_p(t_0) \in B_r(P_0)$



$$\varphi_p(t) \underset{\substack{\uparrow \\ t > t_0}}{=} \varphi_{\varphi_p(t_0)}(t - t_0) \xrightarrow[t \to \infty]{} P_0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\Phi^{-1}(B_{r_0}(P_0))}_{\text{è un intorno di } p_1} \subset \Omega_{P_0}$$



Esempio classico: Pendolo rigido con attrito

$$\varphi'' - k \sin\varphi - \varepsilon\varphi' = 0 \qquad k > 0, \ \varepsilon > 0$$

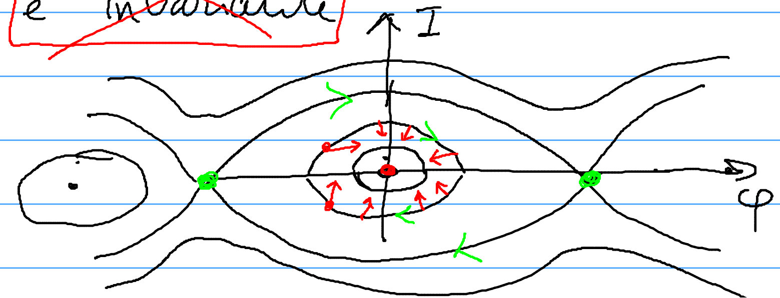
$$\begin{cases} \varphi' = I \\ I' = -k\sin\varphi - \varepsilon I \end{cases} \quad (*)$$

$\mathcal{E}(\varphi, I) \doteq \frac{1}{2} I^2 + k(1 - \cos\varphi)$ $\boxed{\text{è } \cancel{\text{invariante}}}$

$(0,0)$ è critico per $(*)$

$(0,0)$ è stabile

$(0,0)$ è asintoticamente stabile



si verifica $\overbrace{\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\varphi(t), I(t))}^{\dot{\mathcal{E}}} = -\varepsilon I^2 < 0$

se c'è attrito

$\Longrightarrow$ $\mathcal{E}$ è una funz. di Lyapunov per il sist (*)

$(\dot{\mathcal{E}} < 0)$

<u>OSS</u>: Se prendo $\varepsilon < 0$ si può dimostrare che $(0,0)$ è instabile

---

$\boxed{SPG}$ $0 \in \Omega$

$P_0 = 0$ punto critico

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = P \end{cases} \quad (S)$$

<u>Def</u>: V è una funz di Lyapunov per il sistema (S) vicino ad equilibrio $P_0 = 0$ $V \in C^1(\Omega)$

se

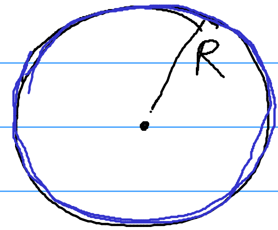
(i) $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0$

(ii) $\dot{V}(x) \doteq \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0 \quad \forall\, x$

<u>Prop</u>: Se 0 ha una funz. di Lyapunov $\Longrightarrow$ 0 è stabile

se vale (ii') $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall |x| \neq 0$ $\Longrightarrow$ 0 è asintot. stabile

Sia $R>0$, SPG $B_R(0)\subset\Omega$



$$m \doteq \min_{\boxed{|x|=R}} V(x) > 0 \quad \leftarrow (i)$$

fisso $0<\varepsilon<m$

e scelgo $r>0$ t.c. $B_r(0)\subseteq\{x : V(x)<\varepsilon\}$ $\leftarrow$ $\left(\begin{array}{l} V(0)=0 \\ V \text{ continua}\end{array}\right)$

$$\boxed{\text{se } p\in B_r(0) \Rightarrow \varphi_p(t)\in B_R(0) \quad \forall\, t\in[0,+\infty)} \leftarrow \text{stab.}$$

fissato $p\in B_r(0)$; $\psi(t)\doteq V(\varphi_p(t))$ $\quad$ $\boxed{\psi'(t)=\nabla V(\varphi_p(t))\cdot F(\varphi_p(t))}$ (@) ≤ 0 $\leftarrow \dot V(\varphi_p(t))$

$\Rightarrow \psi(t)$ è decrescente $\Rightarrow \psi(t)\leq\psi(0)=V(\varphi_p(0))=V(p)<\varepsilon$

$\Rightarrow \varphi_p(t)\notin\partial B_R(0) \Rightarrow |\varphi_p(t)|<R \quad \forall t\geq 0$

$\boxed{\text{stab}}$

$\boxed{\text{asint. stab}}$

(ii') $\rightarrow \dot V<0$, con ψ come sopra, $(p\in B_r(0))$ $\quad \psi'<0$

$$\lim_{t\to\infty}\psi(t)=c_0$$

(A) c_0 non può essere >0

(B) se $c_0=0 \Rightarrow \varphi_p(t)\longrightarrow 0$ per $t\to\infty$

(A) se fosse $C_0 > 0$

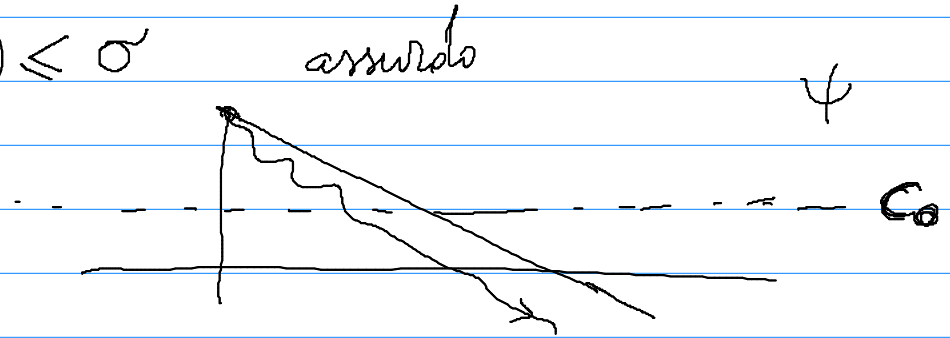
intorno aperto di 0

prendo $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(0) \subset \{V < C_0\}$

$\psi(t) > C_0 \implies \varphi_p(t) \notin B_\delta(0)$

$\sigma := \mathrm{m}\cancel{\mathrm{ax}}_{\delta \le |x| \le r} \dot V(x) < 0$

Pertanto @ $\psi' = \dot V(\varphi_p(t)) \le \sigma$ assurdo



$$\psi(t) \le \psi(0) + \sigma t$$

(B) Da $V > 0$ su ogni insieme $\delta \le |x| \le R$ segue che

$$\psi(t) \longrightarrow 0 \implies \varphi_t(p) \longrightarrow \underline{0}$$

Prop: (Cond per l'instabilità) di $\underline{0}$ per $y' = F(y)$ $\quad (F(0) = 0)$

Se $\exists\, W \in C^1(\Omega)$

(w1) $W(0) = 0$ $\quad \exists\, P_k \longrightarrow 0$ t.c. $W(P_k) > 0$

(w2) $\dot W = \nabla V \cdot F > 0 \quad \forall\, x \ne 0$

$\implies P_0$ è instabile

Dim: $R_0>0$ t.c. $B_R(0)\subset\Omega$ e mostro che

$\forall k\in\mathbb{N}$ $\varphi_{p_k}(t)$ esce da $B_R(0)$ per qualche $t>0$.

Dim: (per assurdo)

$$\frac{d}{dt}\left(W(\varphi_{p_k}(t))\right) = \dot{W}(\varphi_{p_k}(t)) > 0$$

$W(\varphi_{p_k}(t)) \nearrow$ $\Longrightarrow$ $\exists\, \delta>0$: $|W(x)|< W(p_k)$ $\forall |x|<\delta$

$\varphi_{p_k}(t)\notin B_\delta(0)$ $\forall t>0$

$\Longrightarrow$ $\dot{W}(\varphi_{p_k}(t)) > \sigma$ $\qquad \min_{\delta\le|x|\le R} \dot{W}(x) \doteq \sigma > 0$

$\Longrightarrow$ $\varphi_{p_k}(t)$ non può stare in $B_R(0)$ $\forall t>0$

perché $W(\varphi_{p_k}(t)) \ge W(p_k)+\sigma t$ (finché siamo in $B_R(0)$)

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = P \end{cases}$$

$P_0 = 0$ equilibrio $\quad F(0)=0$

$$F(x) = \cancel{F(0)} + \underbrace{DF(0)}_{A \in M_{n\times n}} x + R(x)$$

λ_i autovalori di A $\qquad R(x) = o(|x|)$ per $x \to 0$

Teorema: (1) se $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow$ 0 è asintoticamente stabile

(2) se $\exists\, Re(\lambda_m) > 0 \Rightarrow$ 0 è instabile

— o —

Dim: (1) nel caso di autovalori reali semplici

$\exists\, B$ invertibile tale che $\quad BAB^{-1} = J = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$x(t) \doteq By(t) \qquad x' = By' = BAy + BR(y) \qquad F(y) = Ay + R(y)$

$x' = Jx + \tilde{R}(x)$

$$= BAB^{-1}x + BR(B^{-1}x)$$
$$= Jx + \tilde{R}(x) \qquad \text{con } \tilde{R} = o(|x|)$$

Si verifica che $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ è una funz. di Lyapunov su un opportuno intorno Ω' di 0

Prendo $x(t)$ la sol del sist. per $\begin{cases} x' = Jx + \tilde{R}(x) \\ \end{cases}$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t))\, x'(t) = x\left(Jx + \tilde{R}(x)\right)$$

$$= \sum \lambda_i x_i^2 + \underbrace{x\tilde{R}(x)}_{o(|x|^2)}$$

$\boxed{\lambda_i \leq -\mu < 0}$

$$\leq -\mu|x|^2 + x\tilde{R}(x)$$

$$\leq -\frac{\mu}{2}|x|^2$$

posso scegliere Ω' int. di 0 in modo che su Ω'

$\Longrightarrow$ su Ω' $\dot{V} < 0$ $\Longrightarrow$ stab. asintotica

(2) autov reali semplici $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \ldots \leq \lambda_n$

si applica il crit. di instabilità a $\boxed{W(x) = -\sum_{i \leq k} x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} x_i^2}$

Caso J in forma di Jordan
con autov. reali

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

caso autov. complessi

Fare per esercizio il caso 2×2

In entrambi i casi si può usare
la stessa funz. di
Lyapunov $V = \frac{1}{2}|x|^2$