LEZIONE 28

ANALISI 2

28/4/2021

NOVAGA

INSIEMI FRATTALI

SIMILITUDINI (TRASLAZIONI, ROTAZIONI, OMOTETIE)

$S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$S_i(x) = \lambda_i T_i(x)$$

$\lambda_i \in (0, 1)$

T_i ISOMETRIA

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ FRATTALE ASSOCIATO A $S_1, \dots S_N$

SE $\quad E = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(E)$

TEO $S_1 \dots S_N$ SIMILITUDINI

$\Rightarrow \exists!$ COMPATTO $C \subseteq \mathbb{R}^n$ T.C.

$$C = \bigcup_i S_i(C).$$

ES: $C \subseteq [0,1]$ CANTOR

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad S_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

SIA $K(\mathbb{R}^n) = \{ K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ COMPATTO} \} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

SU $K(\mathbb{R}^n)$ È POSSIBILE METTERE UNA DISTANZA d_H T.C. $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ È METRICO COMPLETO.

$$d_H(C_1, C_2) = \max\left(\max_{x \in C_1} d(x, C_2), \max_{y \in C_2} d(y, C_1) \right)$$

VERIFICARE

$$\overset{\downarrow}{=} \| d(\cdot, C_1) - d(\cdot, C_2) \|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} | d(x, C_1) - d(x, C_2) |$$

DISTANZA DI HAUSDORFF

LA STESSA COSA SI PUÒ FARE

CON UNO SPAZIO METRICO (M, d)

$$K(M) = \{ C \subseteq M \text{ COMPATTI} \}$$

$(K(M), d_H)$ È METRICO COMPLETO

PROP: M È COMPATTO $\Longrightarrow K(M)$ È COMPATTO.

DIM: $T: K(M) \hookrightarrow C^0(M)$ $\quad T(C) = \phi(x, C) \in C^0(M)$

$\to$ BANACH

È UN'IMMERSIONE ISOMETRICA, CIOÈ

$$d_{C^0(M)}\left(T(C_1),T(C_2)\right) = \max_{x\in M} \left| d(x,C_1) - d(x,C_2) \right|$$

$$= d_{\mathcal{H}}(C_1,C_2).$$

DATA UNA SUCC. $C_k \subseteq K(M)$, $C_k \neq \phi$,

LE FUNZIONI $f_k = T(C_k)$ SONO EQUILIMITATE

EQUICONT. (1-LIPSCHITZ) $\Rightarrow$ PER A-A.

$\exists\, f_{n_k} \to f = \text{dist}(x,C) \Rightarrow C_k \to C$ per $d_{\mathcal{H}}$ $\blacksquare$

VERIFICA

OSS: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPATTO

$$K(D) = \{ C \subseteq D \text{ COMPATTI} \}$$

$\Rightarrow (K(D), d_H)$ È METRICO COMPATTO.

DI CONSEGUENZA

$(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ È METRICO COMPLETO.

DIM. TEOREMA

DATO $C \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPATTO SIA

$$\Psi(C) = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(C)$$

È FACILE VEDERE CHE VERIFICA

$$d_{\mathcal{H}}(\Psi(C_1), \Psi(C_2)) \leq \lambda \, d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) \qquad \lambda = \max_i \lambda_i < 1$$

$\Rightarrow$ Ψ È UNA CONTRAZIONE SU $(K(\mathbb{R}^n), d_{\mathcal{H}})$

$\Rightarrow$ $\exists!$ PUNTO FISSO PER Ψ IN $K(\mathbb{R}^n)$ $\blacksquare$

PER TALE C È DEFINITA

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \alpha \quad \text{T.C.} \quad \sum \lambda_i^{\alpha} = 1 .$$

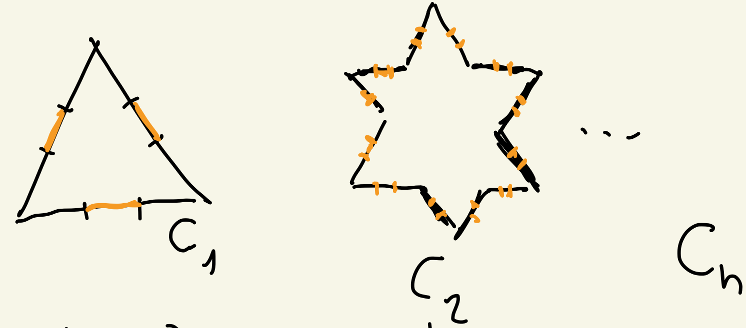
OSS: VALE SEMPRE $\mathcal{H}^{\alpha}(C) < +\infty$,

SOTTO OPPORTUNE IPOTESI SU S_i

VALE ANCHE $\mathcal{H}^{\alpha}(C) > 0$.

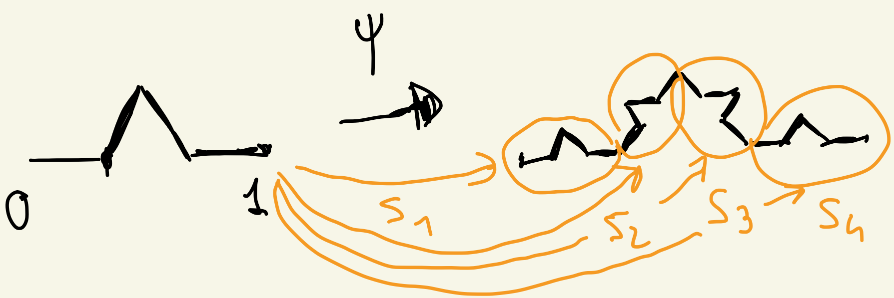
ESEMPI

CURVA DI KOCH



$$\mathcal{H}^1(C_{n+1}) = \frac{4}{3}\mathcal{H}^1(C_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\mathcal{H}^1(C_1) \to +\infty$$

PRENDIAMO SOLO 1 LATO



$$\psi(C) = \bigcup_{i=1}^{4} S_i(C)$$

$$S_i = \frac{1}{3} T_i \qquad T_i \text{ ISOMETRIA}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{3}$$

$$\exists!\; C = \lim_{n} C_n \quad \text{IN} \quad d_{\mathcal{H}}$$

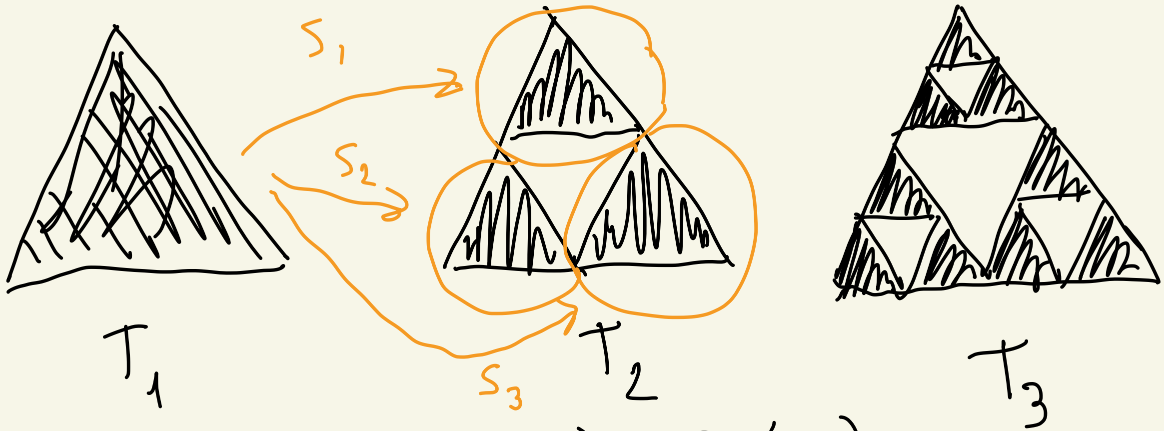
$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \alpha \quad \text{DOVE} \quad \sum \lambda_i^{\alpha} = 1$$

$$4 \cdot \frac{1}{3^{\alpha}} = 1$$

$$3^{\alpha} = 4$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\log 4}{\log 3} \in (1,2)}$$

TRIANGOLO DI SIERPINSKI



$$\psi(C) = S_1(C) \cup S_2(C) \cup S_3(C)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \qquad 3 \cdot \frac{1}{2^\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$T_i \xrightarrow[i]{} T \qquad \psi(T) = T \qquad \dim_{\mathcal{H}}(T) = \frac{\log 3}{\log 2} \in (1,2)$$

TAPPETO DI SIERPINSKI

Q_1 $\quad S_1 \quad$ Q_2 $\quad \dots \quad$ Q_n

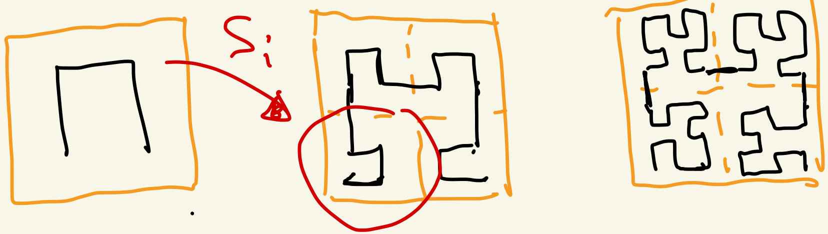
$$\psi(C) = \bigcup_{i=1}^{8} S_i(C) \qquad \lambda_i = \frac{1}{3} \qquad \frac{8}{3^\alpha} = 1$$

$$Q_i \xrightarrow[i]{} Q \text{ in } d_{\mathcal{H}} \qquad \dim_{\mathcal{H}}(Q) = \frac{\log 8}{\log 3} \in (1,2)$$

CURVA DI PEANO

$$\gamma_n : [0,1] \to Q = [0,1]^2$$

OSS: L'IMMAGINE DELLA CURVA DI PEANO "RIEMPIE" IL QUADRATO, CIOÈ $P = Q$!



$P_1 = \mathrm{Im}(\gamma_1)$ $\quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_n$

$$\varphi(C) = \bigcup_{i=1}^{4} S_i(C)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{2^\alpha} = 1$$

$P_n \xrightarrow[n]{} P$ IN $d_{\mathcal{H}}$

$$\dim_{\mathcal{H}}(P) = 2$$

OSS: UN BUON TESTO PER APPROFONDIRE È "FRACTAL GEOMETRY" DI FALCONER

OSS: COL TERMINE FRATTALE SI IDENTIFICANO ANCHE OGGETTI PIÙ COMPLICATI, TIPICAMENTE INSIEMI LIMITE DI SISTEMI DI ODE CONTINUI O DISCRETI (SUCCESSIONI PER RICORRENZA)

ESEMPIO SIGNIFICATIVO:

INSIEME DI MANDELBROT E JULIA

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ANALITICA, TIPICAMENTE $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

$z_{n+1} = f(z_n)$ SUCC. RICORRENZA

$C(f) = \{ z_0 : z_n$ È LIMITATA $\}$

$J(f) = \partial C(f)$

INSIEME DI JULIA

ES: • $f(z) = z^2$ $\quad z_n = z_0^{2n}$ $\quad C(f) = B_1$

$J(f) = \partial C(f)$ CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1

• $f(z) = z^2 + c$ $\quad c \in \mathbb{C}$

L'INSIEME $J_c = J(f)$ PUÒ ESSERE

UN INSIEME "FRATTALE" COMPLICATO

DEF: $M = \{ c : J_c$ È CONNESSO $\} = \{ c : 0 \in J_c \}$

INSIEME DI MANDELBROT

OSS: $J(f)$ È SEMPRE f INVARIANTE,

CIOÈ $f(J(f)) = J(f)$.