- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(*) • Se $f = \sum a_n z^n$ $\qquad g = \sum a_n (z-z_0)^n$

$f$ è olomorfa e

$$f' = \sum n a_n z^{n-1} \qquad g = \sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

e il raggio di convergenza di $f'$ è uguale al raggio di conv. di $f$.

- Se $f$ analitica $\Rightarrow$ $f$ è olomorfa e $f'$ è analitica

- IL MODO IN CUI SI RAPPRESENTA UNA FUNZIONE COME SERIE DI POTENZE È UNICO.

## DEFINIZIONE

Sia $U$ un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $z_0 \in U$

$f : U \to \mathbb{C}$ analitica

Sia $B(z_0, R)$ intorno tale che

$$f = \sum \underline{\underline{a_n}} (z-z_0)^n$$

Se $f \not\equiv 0$ in $B(z_0, R)$ esiste un min $m$ tale che $\boxed{a_m \neq 0.}$

$$f = \underset{\neq 0}{a_m} (z-z_0)^m + \cdots (z-z_0)^{m+1}$$

$m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$ è l'ordine di annullamento di $f$ in $z_0$.

## OSSERVAZIONE

Se $\mathrm{ord}_{z_0} f = 0$ vuol dire che $f(z_0) \neq 0$.

e quindi $f \neq$ in un intorno di $z_0$

Se $\mathrm{ord}_{z_0} f = m > 0$

$$\underline{f} = \underline{(z-z_0)^m}\, g(z) \qquad g(z_0) \neq 0.$$

$$g(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots$$

in un intorno di $z_0$ $g(z) \neq 0$.

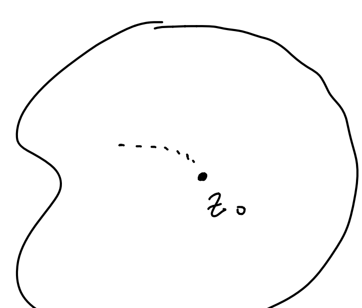
quindi esiste un intorno $V$ di $z_0$ tale che

se $z \in V$ e $z \neq z_0$ allora $f(z) \neq 0$.


**PROPOSIZIONE** $f: U \to \mathbb{C}$ analitica $U$ connesso

$z_n, z_0 \in U$ e $\lim_n z_n = z_0$ $z_n \neq z_0$.

Se $f(z_n) = 0$ allora $f \equiv 0$ su $U$.




dim

- $U = B(z_0, R)$ e sia $f = \sum a_n (z-z_0)^n$ in $B(z_0, R)$

Se $f \not\equiv 0$ è definito $\text{ord}_{z_0} f = m$ e come abbiamo appena visto $f = (z-z_0)^m g$ con $g(z_0) \neq 0$

da cui segue che $\exists$ un intorno $V$ di $z_0$ $\subset U$ tale che se $z \in V$ e $z \neq z_0$ allora $f(z) \neq 0$.

$\Rightarrow z_n \notin V \Rightarrow \lim z_n \neq z_0$

- CASO GENERALE.

Sia $X = \{ z \in U : f(z) = 0 \}$

$z_n \in X$ $\qquad \boxed{z_0 \in X.}$

per il punto precedente in un intorno $B(z_0, R)$ di $z_0$ siamo nelle ipotesi del caso precedente e quindi $f \equiv 0$ in $B(z_0, R)$.

Sia $X_1$ la componente connessa di $X$ che contiene $z_0$ e sia $Y = \mathring{X}_1$.

$Y$ è un aperto e $z_0 \in Y$.

$f \equiv 0$ su $Y$ $\qquad Y \subset X$.

Dimostro che $Y$ è chiuso in $U$.

Sia $w_0 \in \overline{Y} \setminus Y$ e sia $w_n \to w_0$ $\quad w_n \in Y$

Abbiamo $f(w_n) = 0$ e per il primo caso esaminato

abbiamo che $f \equiv 0$ in un intorno $B(w_0, \varepsilon)$ di $w_0$

- $Y \cup B(w_0, \varepsilon)$ è connesso.
- è aperto
- è contenuto in $X$.

assurdo per la definizione di $Y$.

#

**COROLLARIO**

$f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitiche $U$ connesso

e siano $z_n, z_0 \in U$ $z_n \neq z_0$ $z_n \longrightarrow z_0$

se $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n$ allora

$f \equiv g$

dim

Si considera $f - g$ e si applica la proposizione precedente.

#

---

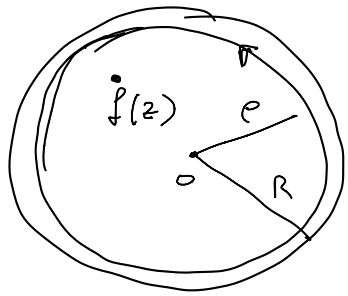
## ANALITICITÀ DELLE FUNZIONI OLOMORFE

### FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

$f : B(0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Allora per $|z| < \rho < R$.

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .}$$




$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$\gamma(t) = \rho\, e^{2\pi i t} .$$

$$I(\gamma, z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .$$

nel nostro caso $I(\gamma, z)$ per $|z| < \rho$ $= 1$.

## TEOREMA

Se $f : B(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa allora $f$ si sviluppa in serie di potenze in $B(z_0, R)$

$$f = \sum a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

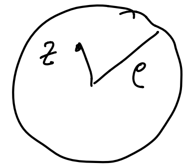
dove $\gamma(t) = z_0 + \rho\, e^{it}$ $\quad \gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow B(z_0, R)$ e $\rho < R$

dim. Facciamo $z_0 = 0$.

Sappiamo che $\forall\, \rho < R$ e $\forall\, z$ con $|z| < \rho$

Abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .$$




$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \, \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\xi^n}$$

per $|\xi| = \rho$ e $|z| < \rho$.

fissato $z$ questa è una serie assolutamente convergente e uniformemente convergente per $|\xi| = \rho$.

$\gamma(t) = \rho e^{it}$

$$= \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it})}{\rho e^{it} - z} \cancel{i} \rho e^{it}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) \frac{1}{\cancel{\rho e^{it}}} \left( \sum \frac{z^n}{\rho^n e^{int}} \right) \cancel{\rho e^{it}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum f(\rho e^{it}) \frac{z^n}{\rho^n e^{int}}\, dt .$$

$f$ è continua e è limitata per $t \in [0, 2\pi]$.

quindi fissato $z$ la serie $\sum f(\rho e^{it}) \frac{z^n}{\rho^n e^{int}}$ è

assolutamente e uniformemente convergente.

$\infty \qquad 2\pi$

$$f(z) = \sum_{n=0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0 f(\varrho e^{it}) \frac{1}{\varrho^n e^{int}}\, dt \right) z^n$$

per ogni $z$ con $|z| < \varrho$.

quindi $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ per $|z| < \varrho$

e $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{it}) \frac{1}{\varrho^n e^{int}}\, dt =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi . \qquad \xi = \gamma(t)$$

$\varrho < R$.

questo cosa è vera per ogni $\varrho < R$.

$\varrho_1 < \varrho_2 < R$

$$\boxed{f(z) = \sum a_n z^n} \qquad |z| < \varrho_1$$

$$= \sum b_n z^n \qquad |z| < \varrho_2$$

per unicità dell'espansione abbiamo $a_n = b_n$

quindi poiché $\varrho_2$ è con questioni $\varrho_2 < R$

la formula $f(z) = \sum a_n z^n$ vale

per ogni $|z| < R$

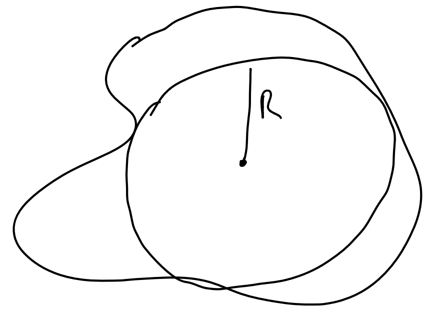
#

OSSERVAZIONE

Se $f$ è olomorfa in $B(0,R)$

allora non solo $f$ è analitica in $B(0,R)$

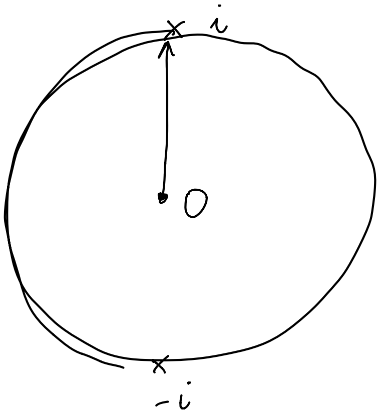
ma $f$ è una serie di potenze in $B(0,R)$




$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

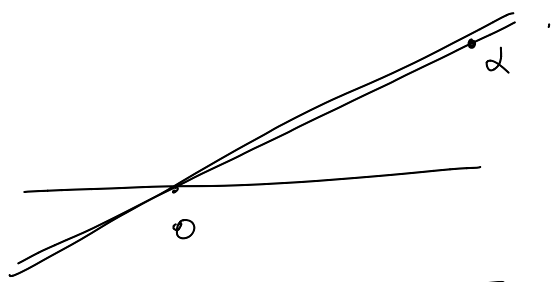
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots\ldots$$

converge per $|x| < 1$.

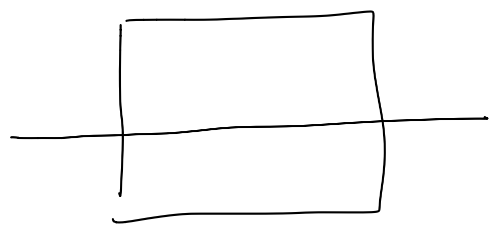



$f(i)$ non è definita

$f(z)$




$f(\alpha z)$.



OSSERVAZIONE

NELLA DIMOSTRAZIONE NON ABBIAMO USATO $f$ OLOMORFA, ABBIAMO USATO

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\boxed{(\xi - z)}} d\xi. \quad \text{con l conto}$$

TEOREMA (TEOREMA DI LIOUVILLE)

Se $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e limitata allora $f$ è costante

dim

Per il teorema $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

convergente $\forall z \in \mathbb{C}$.

E inoltre $\forall \rho > 0$ $\gamma(t) = \rho e^{it}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it})}{\rho^n e^{int}} dt$$

Se $|f(\xi)| \leq L$ per $|\xi| = \rho$. Ricavo

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{it})}{\rho^n e^{int}} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\rho e^{it})|}{\rho^n} dt =$$

$$= \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{2\pi} \int_0 |f(\rho e^{it})| \, dt$$

$$\leq \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L \, dt \leq \frac{L}{\rho^n}$$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY.

$$\boxed{|a_n| \leq \frac{L_\rho}{\rho^n}} \qquad \forall n > 0.$$

Se $\left(L_\rho = \max_{|\xi|=\rho} \left(|f(\xi)|\right)\right.$

RICORDO CHE STO ASSUMENDO $f$ limitata

$$|f(z)| \leq C \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

OTTENGO CHE $\quad |a_n| \leq \dfrac{C}{\rho^n} \quad \forall n > 0. \quad \forall \rho > 0$

DA CUI $\quad a_n = 0 \quad$ se $\quad n \geq 1$

e quindi $\quad f(z) = a_0$

#

<u>COROLLARIO</u> (Teorema fondamentale dell'algebra)

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio non costante allora $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_0) = 0$

<u>dim.</u>

P.A. sia $\quad g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$

è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ perché $f$ non ha zeri.

ma è limitata perché $f$ è un polinomio.

quindi $g$ è costante $\Rightarrow$ $f$ è costante assurdo. #

---

## PRINCIPIO DELLA MEDIA E DEL MASSIMO

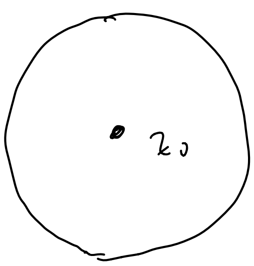
Se $f : B(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_0 = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \, d\xi$$

$\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$.

$$a_0 = \boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \, dt .}$$



(PRINCIPIO DELLA MEDIA)

**LEMMA** $\quad a_0 = f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \, dt \qquad \rho < R$

**TEOREMA** (PRINCIPIO DEL MASSIMO)

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $U$ un aperto di $\mathbb{C}$ connesso.

$f$ olomorfa $z_0 \in U$ e supponiamo

che $$|f(z_0)| = \sup_{z \in U} |f(z)|$$

Allora $f$ è costante

$\underline{\underline{\text{dim}}}$ Poiché $U$ è connesso basta dimostrare che $f$ è costante in un intorno di $z_0$.

(infatti sia $f = \underline{\underline{c}}$ in $\underline{\text{un intorno di } z_0}$

Sia $f : U \to \mathbb{C}$ $g : U \to \mathbb{C}$ $g(z) = c \ \forall z$

$f, g$ sono olomorfe e $\exists$ $z_n \to z_0$ con $z_n \neq z_0$ $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n$. $\Rightarrow$ $f = g$ ).

Posso anche assumere $z_0 = 0$.

Assumo anche che $\boxed{f(z_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.}$

(Infatti se $f(z_0) \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\exists$ $u \in \mathbb{C}$ $|u| = 1$ $\underline{g(z)} = u \underline{f(z)}$ . $u f(z_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

e $|g|$ è massimo in $z_0$ ).

Se $f(z_0) = 0$ $\sup |f| = 0$ $\Rightarrow$ $f \equiv 0$.

Se $f(z_0) > 0$. $0 = z_0$

in un intorno

$$f(\ldots) = \frac{1}{\ldots} \int^{2\pi} f(\ldots)$$

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{it})\, dt}$$

per $\rho < R$ fissato.

$$\mathrm{Re}(f(0)) = \underline{f(0)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underline{\mathrm{Re}(f(\rho e^{it}))}\, dt \overset{=}{\leq} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(0)\, dt}_{= f(0)}$$

Poiché $|f| \leq f(0)$

$\mathrm{Re}\, f \leq f(0)$.

qui $$\int_0^{2\pi} \underline{\mathrm{Re}(f(\rho e^{it}))}\, dt = \int_0^{2\pi} \underline{\mathrm{Re}\, f(0)}\, dt$$

Poiché sono funzioni continue $\mathrm{Re}\, f(\rho e^{it}) \leq \mathrm{Re}\, f(0)$

deve essere $\mathrm{Re}\, f(\rho e^{it}) = \mathrm{Re}\, f(0) = f(0)$

$$\underline{\mathrm{Re}\, f(\rho e^{it})} = \underline{f(0)} \qquad \forall \rho < R$$
$$\forall\, t \in [0, 2\pi).$$

inoltre $$\underline{|f(e^{it}\rho)|} \leq |f(0)| = \underline{f(0)}$$

RICAVIAMO $$f(\rho e^{it}) = f(0)$$
$$\rho < R$$

$t \in [0, 2\pi]$.

quindi $f$ è costante in un intorno di $z_0 = 0$

#

OSSERVAZIONE

NON HO USATO $f$ OLOMORFA.

HO USATO

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\, dt.$$

ESEMPIO

$f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa.

Se il principio della media o il principio del massimo valgono per $f$ allora valgono per $\bar{f}$.

IN PARTICOLARE IL PRINCIPIO DELLA MEDIA NON CARATTERIZZA LE FUNZIONI OLOMORFE.