- f analitica $\Rightarrow$ f è olomorfa
e localmente
$f(z) = \sum a_n z^n$ allora $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$
e quindi f' è a sua volta olomorfa.

- f è olomorfa $\Rightarrow$ f è analitica
f è olomorfa in $B(0,R)$ allora f si espande come una serie di potenze convergente in $B(0,R)$

- PROPRIETÀ DELLA MEDIA

- PRINCIPIO DEL MASSIMO
$f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa U connesso aperto di $\mathbb{C}$.
Se $\exists z_0 \in U$ tale che $|f(z_0)| = \sup_U |f|$
allora f è costante.

LEMMA DI SCHWARZ $\Delta = B(0,1)$ (aperto)

$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa
1) $f(\Delta) \subset \Delta$ cioè $|f(z)| < 1 \ \forall z \in \Delta$
2) $f(0) = 0$

Allora
A) $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \Delta$.

B) e se esiste $z_0 \in \Delta$ e $z_0 \neq 0$ tale che $|f(z_0)| = |z_0|$

allora $f(z) = \lambda z$ per $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>dim.</u>

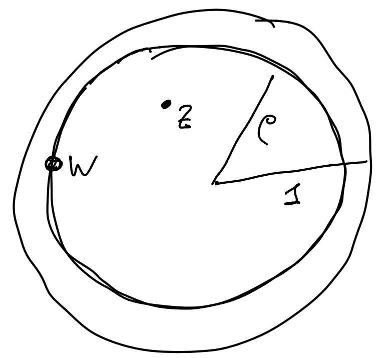
$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \qquad f(0) = 0$$

$$f(z) = z\, \underline{g(z)} \qquad \text{con} \quad \underline{g(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}}$$

g è olomorfa in $B(0,R)$.

A) è equivalente a dimostrare $|g(z)| \leq 1 \ \forall z$.

$|z| < \rho < 1$



Sicuramente per $|w| = \rho$

ottengo che $\underline{|g(w)|} = \dfrac{|f(w)|}{|w|} \leq \underline{\underline{\dfrac{1}{\rho}}}$

Per il principio del massimo ho anche che

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\rho} \qquad \forall \quad |z| < \rho < 1$$

e ricavo $|g(z)| \leq 1$.

Dimostro B). $\exists\, z_0 : |f(z_0)| = |z_0|$ e $z_0 \neq 0$.

quindi $|g(z_0)| = 1$.

e sappiamo che $\sup_{z \in \Delta} |g(z)| \leq 1$

(dimostrato in A)

Per il principio del massimo g è costante.

$g(z) = \lambda \quad \forall z.$ ovvero $f(z) = \lambda z$

\#.

TEOREMA

Sia U un aperto di $\mathbb{C}$

$f, f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$

f_n olomorfe e

f_n convergono uniformemente a f su ogni sottoinsieme compatto di U.

($\forall K$ compatto e $f_n|_K \longrightarrow f|_K$ uniformemente)

Allora f è olomorfa.

dim f è una funzione continua su U.

Voglio dimostrare che $\forall z_0 \in U \ \exists B(z_0, R) \subset U$

tale che f è olomorfa in $B(z_0, R)$.

Scelgo R tale che $K = \overline{B(z_0, R)} \subset U$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f_n(z_0 + Re^{it})}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt}$$

z fissato

$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$

conv. unif e

$$\frac{f(z_0 + Re^{it}) \gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}$$

DA QUESTO RICAVIAMO CHE f È UNA SERIE DI POTENZE IN $B(0, R)$ COME ABBIAMO FATTO QUANDO ABBIAMO DIMOSTRATO

f olomorfa $\Rightarrow$ f analitica.

#

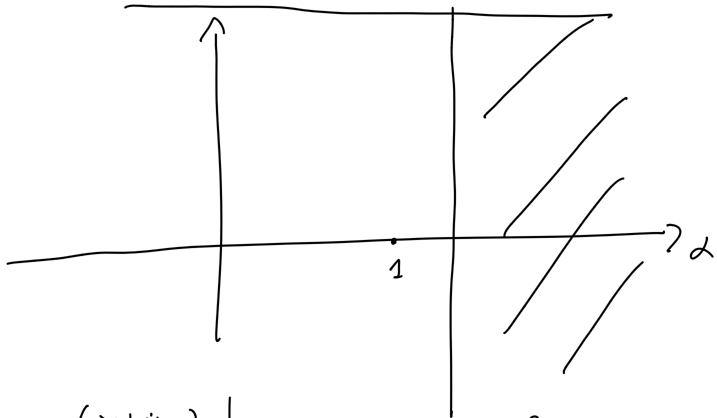
ESEMPIO $\boxed{n \in \mathbb{N} \quad n > 0}$

$$\frac{1}{n^z} := n^{-z} := e^{-z \log n}$$

solo olomorfa

$$\zeta(z) = \sum^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

OSSERVAZIONE la serie converge uniformemente e assolutamente se $\operatorname{Re} z \geq \alpha > 1$.



$z = x + iy$

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|e^{-\log n\,(x+iy)}\right| = e^{-x\log n} = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Per $\operatorname{Re}(z) \geq \alpha$ $\quad \left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$

e quindi $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente.

$\displaystyle\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ è una funzione

olomorfa $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

FATTO

$\exists$ siste una estensione di ζ olomorfa e tutto $\mathbb{C} \setminus \{1, 0\} = U$

OSSERVAZIONE QUESTA POSSIBILE ESTENSIONE È UNICA

Siano f, g olomorfe

$$f, g : U \to \mathbb{C}$$

$$\underbrace{f\big|_{\{\mathrm{Re}\, z > 1\}}} = \zeta = \underbrace{g\big|_{\{\mathrm{Re}\, z > 1\}}}$$

quindi $f = g$.

La chiamiamo ζ.

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}\right) \neq \boxed{\sum \frac{1}{\sqrt{n}}}$$ non converge.

$$\zeta(-1) \neq \sum \frac{1}{n^{-1}} = \sum n$$ non converge.

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$

SERIE DI LAURENT

Diciamo che $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ è convergente in z_0

∞

se $\sum_{n=0} a_n z^n$ converge per $z = z_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad \text{converge per} \quad z = z_0 .$$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = f_+(z) + f_-(z)$$

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

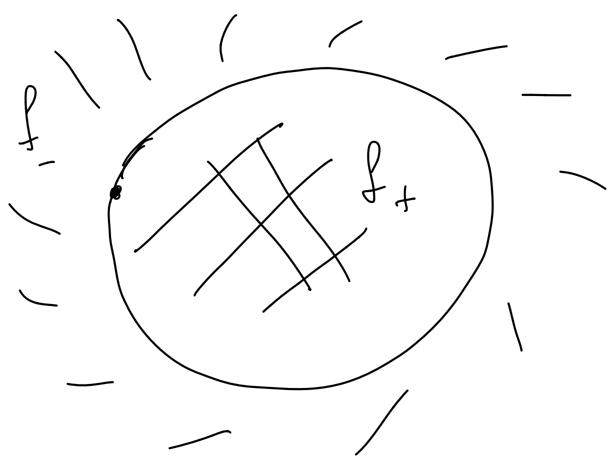
$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \qquad \frac{1}{z}$$

Se f converge per $z = z_0$ allora

supponiamo 1) f_+ converge per $|z| < |z_0|$

2) f_- converge $\left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{1}{z_0}\right|$

ovvero per $|z| > |z_0|$.



Supponiamo che R il raggio di convergenza di f_+

e che sia $\frac{1}{2}$ il raggio di convergenza di

$\sum^{\infty}$

$$\sum_{n=1} a_{-n}\, w \qquad \left(w = \frac{1}{z}\right)$$

ovvero f_- converge per $|z| > r$.

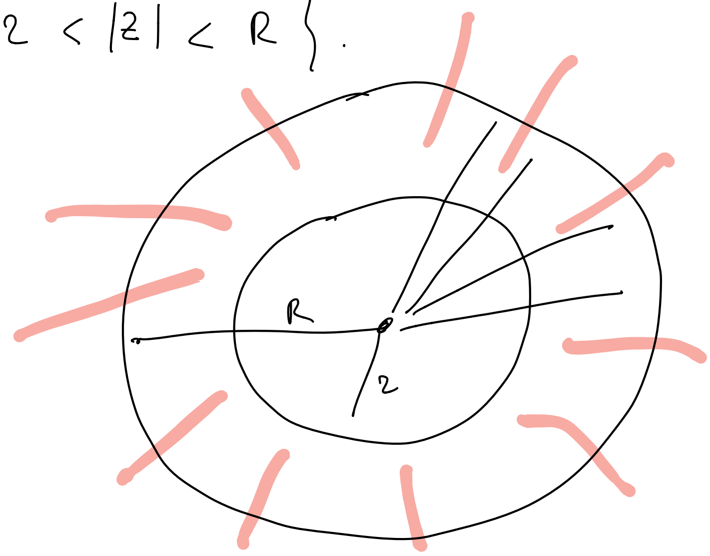
Supponiamo che $0 \le r < R \le \infty$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = f_+(z) + f_-(z)$$

f_+: è una serie che converge per $|z| < R$

f_-: è una serie che converge per $|z| > r$

$$C = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \}.$$



f_+ è olomorfa in $|z| < R$

f_- è olomorfa in $|z| > r$. //

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$$

$$\underline{z \longrightarrow \frac{1}{z}} \qquad \underline{w \to \sum a_{-n} w^n}$$

f è una funzione olomorfa in $C = \{ z : r < |z| < R \}$.

PROPOSIZIONE $\quad C = \{ z : r < |z| < R \}$

Sia $\quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n$

due serie di Laurent che convergono per $z \in C$.

e supponiamo $f(z) = \sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ per $z \in C$.

allora
$$\underset{\sim}{a_n} = \underset{\checkmark}{b_n} = \underline{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi} \quad \forall n.$$

$\gamma(t) = \rho e^{it}$ con $r < \rho < R$.

dim

BASTA DIMOSTRARE LA FORMULA. CALCOLIAMO

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi =$$

per $\underline{|z| = \rho}$

$$f(z) = \sum a_n z^n = \overbrace{f_+(z)}^{\downarrow} + \overbrace{f_-(z)}^{\downarrow}$$

$$f_+(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \qquad f_-(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n$$

entrambe le serie che definiscono f_+ e f_-

convergono uniformemente e assolutamente.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sum a_m \xi^m}{\xi^{n+1}}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}.} a_m \xi^{m-n-1}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{m\geq 0} a_m \xi^{m-n-1}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{m<0} a_m \xi^{-m-n-1}\, d\xi$$

$$= \sum_{m\geq 0} a_m \frac{1}{2\pi i}\boxed{\int_\gamma \xi^{m-n-1}\, d\xi} +$$

$$+ \sum_{m<0} a_m \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \xi^{m-n-1}\, d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \xi^{-k}\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq 1 \quad (*) \\ 1 & \text{si } k = 1. \quad (*) \end{cases}$$

$m-n-1 = -1 \qquad m = n.$

$$= a_n \cdot 1 = a_n$$

#

LA RAPPRESENTAZIONE DI UNA FUNZIONE COME SERIE DI LAURENT È UNICA.

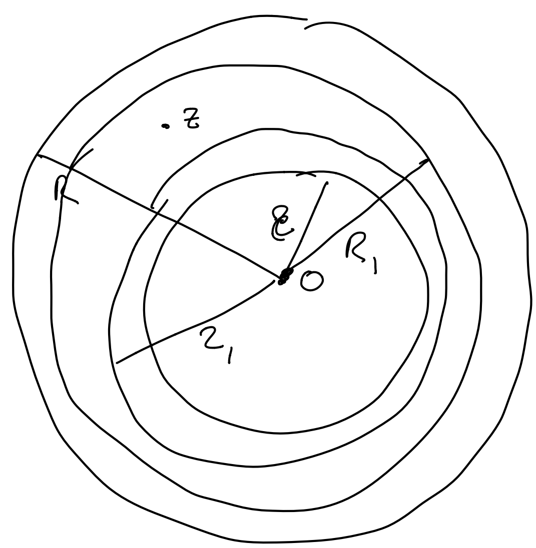
TEOREMA Sia $0 \le r < R \le \infty$

Sia $C = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z| < R \}$

Sia $f : C \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa.

Allora f si esprime come una serie di Laurent convergente in C.

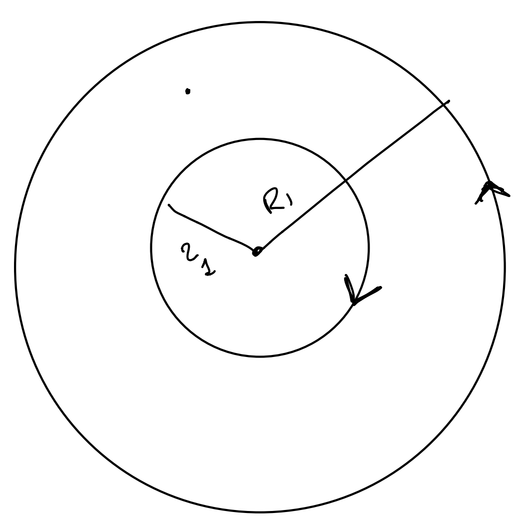
dim



Sia $z \in C$

Sia $\underline{r} < \underline{r_1} < |z| < \underline{R_1} < \underline{R}$

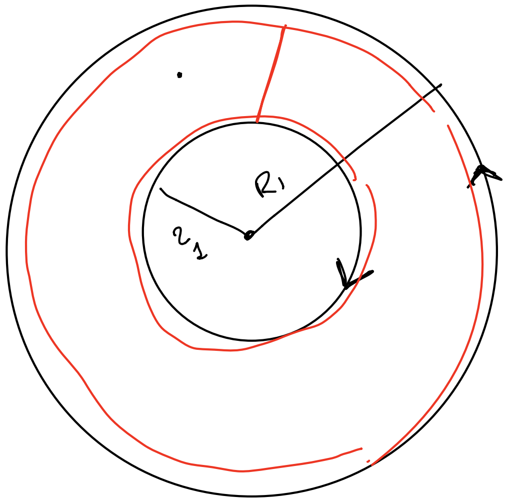
$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

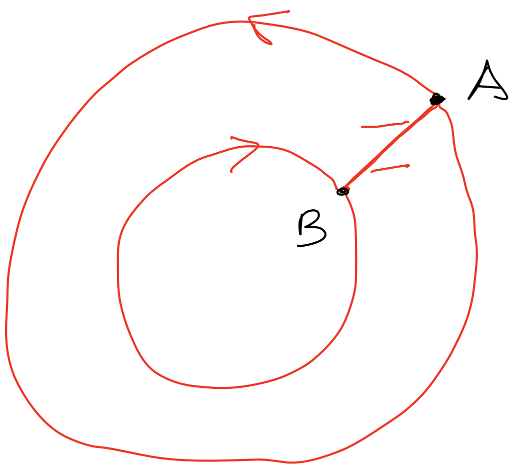


OSSERVIAMO CHE PER $r_1 < |z| < R_1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\xi| = r_1 \\ \circlearrowright}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\xi| = R_1 \\ \circlearrowleft}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

IN FATTI

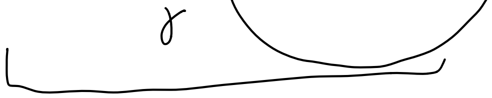


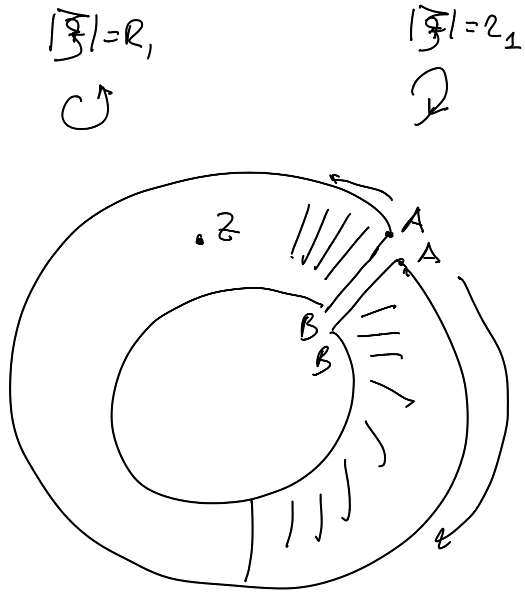


Sia γ il cammino che parte da A percorre il cerchio esterno, torna ada B percorre il tratto fino a B, percorre il cerchio interno all'incontrario, percorre il tratto da B a A.

γ è un cammino chiuso.

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int \cdots + \frac{1}{2\pi i} \int \cdots}$$





osserviamo che $\frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \omega$

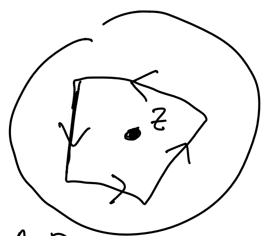
è una forma lineare in $\underline{\mathbb{C}\setminus z}$

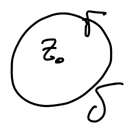
perché f è olomorfa.

quindi $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$

se δ è un cammino omotopo a γ

(omotopia libera) in $\mathbb{C}\setminus z$.





OSSERVO CHE γ È OMOTOPO AD

UN CAMMINO CHE PERCORRE UN CERCHIETTO

ATTORNO A z.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\xi| = r_1 \\ \circlearrowright}} \omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{|\xi| = R_1 \\ \circlearrowleft}} \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\delta \omega = \underline{\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z)}$$

con $\underline{\delta(t) = z + \varepsilon e^{it}}$ con ε piccolo.

quindi

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}_{|z|<R_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}_{|z|>r_1}$$

co

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi =$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\xi^n} \qquad \begin{array}{l}|z|<R_1\\ |\xi|=R_1\end{array}$$

CONE IERI $\boxed{= \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2\pi i}\int_{|\xi|=R_1}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi .}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi . \qquad \begin{array}{l}|z|>r_1\\ |\xi|=r_1\end{array}$$

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{\xi}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{\xi^n}{z^n}$$

P $\sum_{n\geq 0} f(\xi)\frac{\xi^n}{z^n}$ converge uniformemente su $|\xi| = r_1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \boxed{\sum_{n\geq} \frac{1}{z^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\int f(\xi)\,\xi^n\,d\xi .}$$

$|\zeta| = r_1$ $\quad n \geq 0 \quad \rightrightarrows \quad |\zeta| = r_1$

quindi in $\boxed{r_1 < |z| < R_1}$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n}$$

in $r_2 < r_1 < |z| < R_2 < R_2$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n \quad \text{in } \boxed{r_2 < |z| < R_2}$$

Poiché le due serie coincidono in $r_1 < |z| < R_1$

$a_n = b_n$.

quindi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge in $r_2 < |z| < R_2$

$\forall \quad r < r_2 < r_1 \quad$ e $\quad \forall \quad R_1 < R_2 < R$

quindi $f(z) = \sum a_n z^n$ in tutto C

#