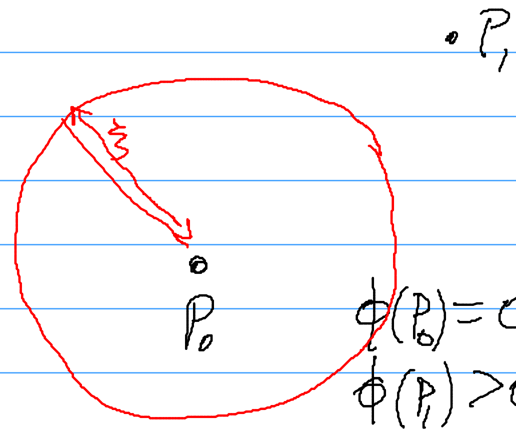
$\boxed{\text{30 apr 2021}}$ (lez. finale)

6 maggio ore 11: Ric Studenti

Es: $E \subseteq \mathbb{R}^n \quad H^1(E)=0 \Longrightarrow E$ totalm. sconnesso.

cioè, se $P_0, P_1 \in E \quad P_0 \neq P_1 \Longrightarrow P_0$ & P_1 stanno in c.c. distinte.



$\phi(x) = d(x, P_0) = |x - P_0|$

ϕ è 1-Lipschitz. $\quad \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\phi(P_0)=0$

$\phi(P_1)>0 \quad (P_1 \neq P_0)$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{H^1(\phi(E))} \le H^1(E) = 0$$

$\exists\, \xi \in [0, \phi(P_1)] \setminus \phi(E) \neq \emptyset$

$\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = \xi\} \cap E = \emptyset$

$E = \{x \in E : \phi(x) < \xi\} \sqcup \{x \in E : \phi(x) > \xi\}$ #

$(\Longleftarrow)$? $\boxed{\text{Per } n=1}$ ¿ Se $E \subseteq \mathbb{R}$ tot sconnesso $\Longrightarrow H^1(E) = 0$? NO

$\mathbb{Q}$ ha mis. nulla $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{fisso } \varepsilon > 0,\ 0<\varepsilon<1}$ $\exists\, U$ intorno aperto di $\mathbb{Q}$ $|U| < \varepsilon$

$E = [0,1] \setminus U$ $\qquad$ $leb(E) = H^1(E) > 1-\varepsilon > 0$

Ma E è totalmente sconnesso. $E \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

$P_0 < P_1 \in E$ $\qquad$ $\exists\, \xi \in \mathbb{Q} : \ P_0 < \xi < P_1$ $\qquad$ $E = [E \cap [0,\xi)) \sqcup (E \cap (\xi,1]]$

— o —

In dim. più alta è possibile costruire insiemi E tot. sconnessi con $H^s(E) = 0$ anche con $s > 1$

Es: $S_1 \dots S_n$ similitudini contrattive $\quad |S_i(x) - S_i(y)| = \lambda_i |x-y|$

$0 < \lambda_i < 1$

$\boxed{\text{OSC}}$ $\exists\, U$ aperto limitato $U \neq \emptyset$ t.c. $U \supset \bigcup_{i=1}^{n} S_i(U)$

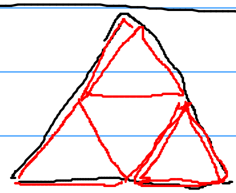
$\exists\, F$ chiuso t.c.

$F = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(F)$

con questa ipotesi $0 < H^s(E) < +\infty$

per s t.c. $\sum \lambda_i^s = 1$

Nel caso di Sierpinski U interno di un triangolo



Es: Mostrare che se questa unione è disgiunta allora F è totalmente sconn

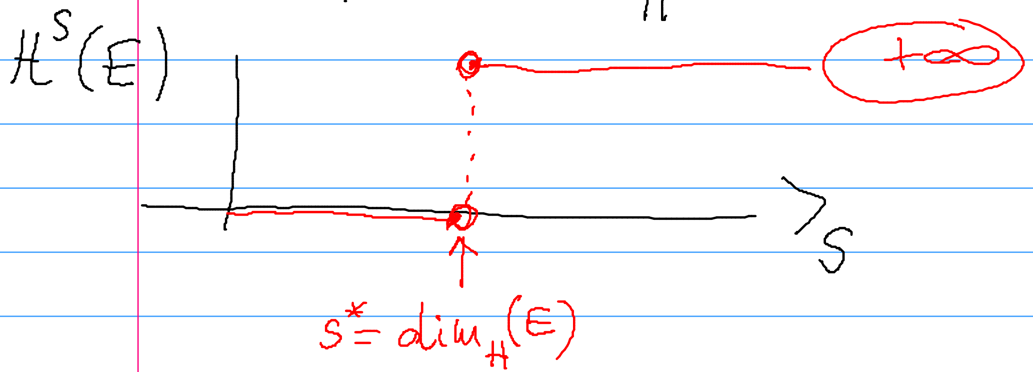
$(\alpha \leq 1)$

Es: ϕ α-Hölder $\quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \quad (*)$

Allora (a) $\mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha}\mathcal{H}^{s}(E)$

(b) $\dim_H(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H(E) \quad (\Delta)$

$\boxed{\alpha = 1 \quad \phi \text{ Lip}}$



Es: Mostrare che la scala del diavolo è α-Hölderiana con $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$

esp. ottimale

• $f = \lim f_n$ $\quad$ f_n sono tutte equi $\frac{\log 2}{\log 3}$-Hölderiane

soddisfano tutte $(*)$ con $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ e lo stesso C.

$\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ è ottimale per (Δ)

$y' = AY$ $\qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) stab dell'origine

(2) sol generale

(1) Determino $\sigma(A)$.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$$

$= 2+\lambda+2 + \lambda+2+2 + \lambda\left((\lambda+2)^2 - 4\right)$

$= 8 + 2\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^3$ $\qquad \lambda = -4$

$= (\lambda+4)(\lambda^2+2)$ $\qquad \sigma(A) = \{-4, \pm\sqrt{2}i\}$

O è stabile ma non asintoticamente stabile

(2) Per scrivere esplicitamente le soluzioni devo trovare gli autovettori di A

$v_0 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovett per $\lambda_0 = -4$

$Av_2 = -\sqrt{2}i\, v_2$

$v_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$ è autovett con $\lambda = \sqrt{2}i$ $\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$

$v_1 = \xi + i\eta$ con $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\qquad v_2 = \xi - i\eta$

$$A\xi = -\sqrt{2}\,\eta$$
$$A\eta = \sqrt{2}\,\xi$$

$$y(t) = a(t)\,\xi + b(t)\,\eta \qquad (Y)$$

$$y'(t) = a'\xi + b'\eta = Ay = a(-\sqrt{2})\eta + b\sqrt{2}\,\xi$$

(Y) è sol sse $\begin{cases} a' = b\sqrt{2} \\ b' = -\sqrt{2}\cdot a \end{cases} \qquad (\Sigma)$

$\begin{cases} a_1 = \cos\sqrt{2}t \\ b_1 = -\sin\sqrt{2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \sin\sqrt{2}t \\ b_2 = \cos\sqrt{2}t \end{cases}$

sol lin indip di (Σ)

La sol generale del sistema è $y(t) = c_0 y_0(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ con $c_i \in \mathbb{R}$

$$y_0(t) = e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_1(t) = \cos(\sqrt{2}t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(\sqrt{2}t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$y_2(t) = \sin(\sqrt{2}t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(\sqrt{2}t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Es: Calcolare e^{tA} osservando che, posto $M \doteq (v_0, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$M: e_0 \to v_0$
$\quad e_1 \to \xi$
$\quad e_2 \to \eta$

$A = MCM^{-1}$

$C = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$e^{tA} = Me^{tC}M^{-1}$

$C: e_0 \xrightarrow{M} v_0 \xrightarrow{A} -4v_0 \xrightarrow{M^{-1}} -4e_0$
$\quad e_1 \to \xi \longrightarrow -\sqrt{2}\eta \xrightarrow{M^{-1}} -\sqrt{2}e_2$
$\quad e_2 \to \eta \longrightarrow \sqrt{2}\xi \longrightarrow \sqrt{2}\eta$

$f \in Lip'(\mathbb{R})$ $\quad y$ sol^{e} massimale di

$y'' = f(y) \quad (*)$

(a) $y \in C^2(\mathbb{R})$ (esist. globale)

(b) se $y \not\equiv 0$ $\Rightarrow Z = \{t : y(t) = 0\}$ ha solo punti isolati.

(a) y sol di $(*)$ $\Longleftrightarrow$ $y, p=y'$ è sol di $\begin{cases} y'=p \\ p'=f(y) \end{cases}$ (S)

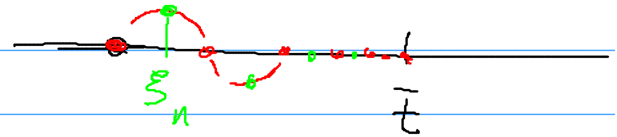
$F(p,y)=\begin{pmatrix} p \\ f(y) \end{pmatrix}$ $\quad F(p,y)$ glob. Lip $\Longrightarrow$ c'è esist. globale (ed unicità)

$|F(p,y)| \le a + b\sqrt{p^2+y^2}$

(b) Per assurdo: Se t_n t.c. $y(t_n)=0$
$t_n \to \bar{t}$ $\qquad \Longrightarrow y(\bar{t})=0$

$\forall n \quad \exists\, \xi_n \in (t_n, t_{n+1})$ t.c. $y'(\xi_n)=0$

$\xi_n \to \bar{t} \xRightarrow{\text{cont di } y'} y'(\bar{t})=0$



$\forall n \quad \exists\, \eta_n \in (\xi_n, \xi_{n+1}) : y''(\eta_n)=0$

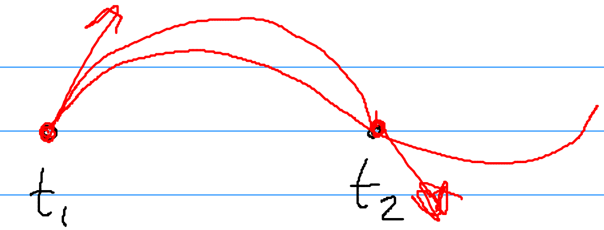
$\eta_n \to \bar{t} \quad \Longrightarrow y''(\bar{t})=0$

$y''(\bar{t}) = f(y(\bar{t})) = 0$

$\longrightarrow \begin{cases} y''=f(y) \\ y(\bar{t})=0 \\ y'(\bar{t})=0 \end{cases}$ (C)

- y è sol di (C) $\qquad \sim f(0)=0$
- Dato che $f(0)=0 \Longrightarrow \tilde{y}(t)=y(\bar{t})=0$ è sol $\xRightarrow{\text{unicità}} y(t)=\tilde{y}(t)=0$

Alternativa



$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $\qquad \Gamma := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$

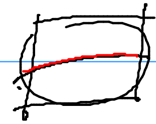
(a) Γ limitato

(b) $\Gamma \cap \{\nabla f = 0\} = \emptyset$

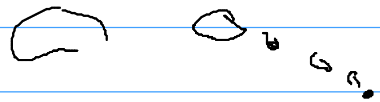
$\Rightarrow$ Γ è unione finita di curve chiuse

cond chiusa

Dim: (b) segue che Γ vicino ad ogni punto è una curva regolare

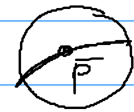
$p \in \Gamma$ $\quad \exists\, U$ int. di p t.c. $\quad \Gamma \cap U =$ 

(a) Γ compatto $\Rightarrow$ le comp. connesse di Γ sono in num. finito

 $\Gamma = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n$ comp. conn

$P_n \in \Gamma_n$ $\qquad P_{n_k} \to \bar{P} \in \Gamma$

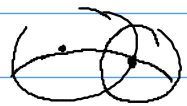
assurdo

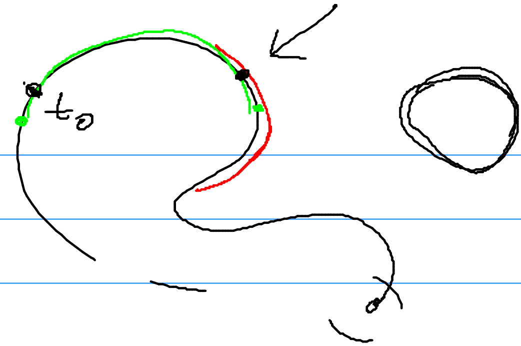


Ogni comp connessa è una curva chiusa

$\gamma(t)$ parametrizz di una di queste curve

$\gamma : I$





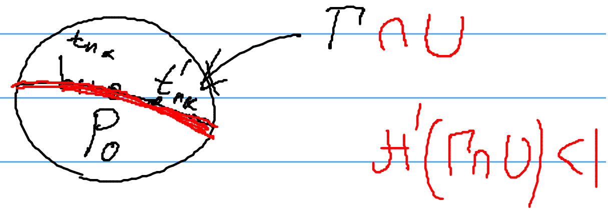
$\gamma : J \longrightarrow \Gamma$ param. massimale per lungh. d'arco

$J = \mathbb{R}$

se $J = (a,b)$ $\quad b \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{t \to b^-} \gamma(t) = p \in \Gamma$

$\boxed{\text{Se } \gamma \text{ fosse iniettiva}}$, $\exists\, \eta \to +\infty$

$\gamma(\eta_k) \to P_0 \in \Gamma$,



assurdo

$\Longrightarrow$ γ non è iniettiva.

—— o ——

$f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ $\qquad \Gamma \doteq \{x : 0 \leq f(x) \leq 1\}$

(a) Γ limitato

(b) $Df(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma$

Allora Γ_0 $\{f(x) = 0\}$ e $\{f(x) = 1\} = \Gamma_1$ sono varietà diffeomorfe

regolari e $\Gamma_0 \cong \Gamma_1$

Sugg: considerare $\varphi(t, x_0)$ flusso associato al pb di Cauchy

$$\begin{cases} X' = \dfrac{\nabla f(X)}{\|\nabla f(X)\|^2} \\ X(0) = X_0 \in \Gamma_0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t, x_0)) = 1$$

$x(t) = \varphi(t, x_0)$

$$\varphi(1, \cdot) : \Gamma_0 \xrightarrow{\sim} \Gamma_1$$

gi<u>ov. 6 maggio</u> ore 11 ric. studenti