Note Title 2021-05-04

$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$

$u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$

controllo LQ:

trovare u t.c.

$$\min \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \qquad Q \succeq 0 \quad R \succ 0$$

$$\text{s.t. } \dot{x} = Ax + Bu \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

__Teo:__ Siano (A,B) controllabile, $Q \succeq 0$, $R \succ 0$

Esiste unica $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $\qquad G = BR^{-1}B^T \succeq 0$

1) $A^T X + XA + Q - XGX = 0$

2) $\Lambda(A - GX) \subset LHP$

e la soluzione del problema di controllo ottimo è $u = Fx$

con $F = -R^{-1}B^T X$ (così il sistema "closed loop" è $\dot{x} = (A - GX)x$)

In più, $X \succeq 0$: difatti,

$$(A - GX)^T X + X(A - GX) + Q + XGX = 0$$

$$\hat{A}^T X + X\hat{A} + \hat{Q} = 0, \quad \text{con } \hat{A} = A - GX, \quad \hat{Q} = Q + XGX$$

$\Lambda(\hat{A}) \subset LHP$, $\hat{Q} \succeq 0 \Rightarrow X \succeq 0$

(Se inoltre (A^T, Q) controllabile, $X \succ 0$)

Fattorizzazione:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -XA - Q & -A^T + XG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A-GX & -G \\ \boxed{-XA-Q-A^TX+XGX} & -(A-GX)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-GX & -G \\ 0 & -(A-GX)^T \end{bmatrix}$$

$$\underset{\displaystyle 0}{\overset{\parallel}{}}$$

di nuovo Hamiltoniana, cioè $J\mathcal{H} + \mathcal{H}^* J = 0$

$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \Lambda(\mathcal{H}) = \underset{\displaystyle LHP}{\underset{\cap}{\Lambda(A-GX)}} \cup \underset{\displaystyle RHP,\ -\overline{\Lambda(A-GX)}}{\underset{\cap}{\Lambda(-(A-GX)^T)}}$$

e $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è il sottosp. inv. che corrisponde ai primi

Recall: soluzioni di (ARE) collegate ai sottosp. invarianti di $\mathcal{H}$:

X risolve (ARE) $\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A-GX) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è un sottosp. inv. di $\mathcal{H}$

Tra tutti i sottosp. inv. di dimensione n di $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, ce n'è esattamente uno associato agli n autoval. nel LHP $\Rightarrow \exists !$ sol. stabilizzante

Come calcoliamo X?

1) Metodo di Newton

2) Metodi agli autovalori (es. riordinamento forma di Schur)

3) Funzione segno, $\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\right)$

Metodo di Newton

$$F(X) = A^TX + XA + Q - XGX$$

$$F(X+H) = \underbrace{A^TX + XA + Q - XGX}_{F(X)} + \underbrace{A^TH + HA - HGX - XGH}_{L_{F,X}[H]} - \underbrace{HGH}_{o(\|H\|)}$$

$$L_{F,X}[H] = (A-GX)^TH + H(A-GX)$$

$$\hat{L}_{F,X} = I \otimes (A-GX)^T + (A-GX)^T \otimes I$$

Nella soluzione stabilizzante X_*, $\hat{L}_{F,X_*} = I \otimes \underbrace{(A-GX_*)^T + (A-GX_*)^T}_{\text{autovalori nel LHP}} \otimes I$

$\Rightarrow$ autovetori di $\hat{L}_{F,X_*}$ sono $\lambda_i + \lambda_j$ $i,j=1,\dots n$, $\{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\} = \Lambda(A-GX)$

e quindi $\Lambda(\hat{L}_{F,X_*}) \subset LHP$. In particolare, $\hat{L}_{F,X_*}$ non è singolare.

Metodo di Newton: dato $X_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, poi per $k=0,1,2,\dots$

1) Risolvo $L_{F,X_k}[H] = F(X_k)$ per trovare H

2) $X_{k+1} = X_k - H$

L'eq. da risolvere è

$$\boxed{(A-GX_k)^T H + H(A-GX_k) = Q + A^T X_k + X_k A - X_k G X_k}$$

cambio segno e sommo

$$(A-GX_k)^T X_k + X_k(A-GX_k) = A^T X_k + X_k A - 2 X_k G X_k$$

e ottengo

$$\boxed{(A-GX_k)^T X_{k+1} + X_{k+1}(A-GX_k) = -Q - X_k G X_k}$$

$\to$ eq. di Lyapunov in H

Se $\Lambda(A-GX_k) \subset LHP \Rightarrow X_{k+1} \succcurlyeq 0$

Teo: Supponiamo $\Lambda(A-GX_0) \subset LHP$. Allora,

$\cancel{X_0 \succcurlyeq}\ X_1 \succcurlyeq X_2 \succcurlyeq X_3 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq X_* \succcurlyeq 0$, e $X_k \to X_*$ quadraticamente

(def. $A \succcurlyeq B \Leftrightarrow A-B$ pos. semidefinita)

Alg. di Bass: se $\alpha > \rho(A)$,

risolvendo $-(A+\alpha I)W - W(A+\alpha I)^T + 2BB^T = 0$, troviamo

W tale che $\Lambda(A-BB^T W^{-1}) \in LHP$

invece vorremmo $A - GX_0 = A - BR^{-1}B^T X_0 \in LHP$

Nel nostro caso, $R^{-1} = I$, ma anche se non lo fosse, basta calcolare una fatt. di Cholesky $R = LL^T$, definire $\hat{B} = BL^{-T}$, e applicare l'alg. di Bass a $(A, \hat{B})$.

"iterative refinement" / "defect correction": un passo di Newton alla fine di un altro algoritmo (inaccurato) per aumentare l'accuratezza della sol. trovata.

Metodo di Schur

1) Calcolo $[Q,T] = \mathrm{schur}(H)$ $\qquad H = QTQ^T$

2) Riordino la forma di Schur per avere $H = [Q_1 | Q_2] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} [Q_1, Q_2]^*$

con $\Lambda(T_{11}) \subset LHP \Rightarrow \mathrm{Im}\, Q_1$ è invariante per H, difatti

$$H Q_1 = Q_1 T_{11}$$

3) Se $Q_1 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ U_2 U_1^{-1} \end{bmatrix} U_1$, $\quad X = U_2 U_1^{-1}$

Costo: 1 forma di Schur, anziché una per passo nel metodo di Newton

Forma di Schur è stabile all'indietro: garantisce che $\frac{\|H - QTQ^*\|}{\|H\|} = O(u)$

Difatti, la calcolo con una successione di trasf. ortogonali a partire da H

$H = M_0 \qquad M_1 = Q_0^T M_0 Q_0, \quad M_2 = Q_1^T M_1 Q_1, \quad M_3 = Q_2^T M_2 Q_2, \ldots$

In ognuna, $fl(M_1) - M_1 = E_1$ è tale che $\|E_1\| \leq \|Q_0^T\| \cdot \|M_0\| \cdot \|Q_0\|\, O(u)$
$= \|M_0\|\, O(u)$

$$fl(M_1) = M_1 + E_1 = Q_0^T \big(M_0 + \underbrace{Q_0 E_0 Q_0^T}_{F_0}\big) Q_0 \qquad \|F_0\| = \|E_0\| \leq \|M_0\|\, O(u)$$

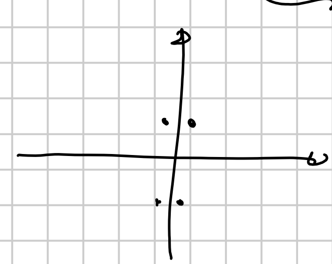
Fatto per ogni passo $\Rightarrow$ la $\hat{T}$ calcolato è tale che

$$T = Q_k^T Q_{k-1}^T \cdots Q_1 \big(H + F_0 + F_1 + \ldots + F_k\big) Q_1 Q_2 \cdots Q_k$$

con $\|F_0 + F_1 + \ldots + F_k\| \leq O(u)\, \|H\|$

Il metodo di Schur produce un sott. invariante $\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix}$ stabile all'indietro, cioè $\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix}$ calcolato è un sott. inv. esatto di $H + \underbrace{F_0 + F_1 + \ldots + F_k}$

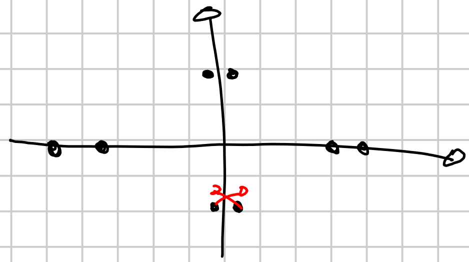
con $\|F_0 + \ldots + F_k\| \leq \|H\| \cdot O(u)$



Però, $H + F_0 + F_1 + \ldots + F_k$ non è Hamiltoniana!

Se H ha autoval. vicini all'asse immaginario, mappa gli autoval. di T non stanno n a sx e n a dx di iR.

Per CAREX(14):



$$U_1^* U_2 - U_2^* U_1 = 0$$

non vale $= 0$ X calcolata

non è simmetrica ed è lontana dalla sol. vera del problema