Precisazione su un esercizio del 23 apr 2021.

TESTO

Sia $g \in C(\mathbb{R})$ t.c. $y\,g(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$

Allora $y \equiv 0$ è soluz. $y'' + y' + g(y) = 0 \quad (E)$

studiare la stabilità di questa soluzione.

OSS$_1$: g cambia segno in un int. di $0 \xRightarrow{\text{continuità}} g(0) = 0$

$y(t) \equiv 0$ è sol di (E) ovvio

OSS$_2$: Dato che $g'(0)$ potrebbe essere 0 (p. es $g(y) = y^3$) $\begin{cases} y' = p \\ p' = -p - g(y) \end{cases}$ $F(y,p)$

non è possibile utilizzare direttamente il metodo di linearizzazione.

Tuttavia possiamo discutere la stabilità definendo una funzione di Lyapunov

$$G(y) \doteq \int_0^y g(s)\,ds$$

OSS G ha un minimo in 0 $\quad G'(y) > 0 \quad y > 0$, $\quad G'(y) < 0 \quad y < 0$

$$V(p, y) = \frac{1}{2} p^2 + G(y) \qquad \text{soddisfa } \dot{V} \leq 0$$

$$\dot{V} = \nabla V \cdot F = \begin{pmatrix} g(y) \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -p - g(y) \end{pmatrix} = \cancel{pg} - p^2 - \cancel{pg} \leq 0$$

$\dot{V} \leq 0 \xRightarrow{\text{Lyapunov}}$ $\underline{0}$ è un equilibrio STABILE.

$\underline{0}$ è minimo globale di G, e possiamo scegliere $K>0$ in modo che $\{V \leq K\}$ sia compatto.

Sia ora $(y(t), p(t))$ una soluzione del sistema $\begin{cases} \dot{y} = p \\ \dot{p} = p - g(y) \end{cases}$ t.c. $V(y(0), p(0)) \leq K$;

- se $\exists\, t_k \nearrow +\infty$ tale che $V(y(t_k), p(t_k)) \to 0$ allora $V(y(t), p(t)) \to 0$ (dato che $\dot{V} \leq 0$)
- altrimenti $\exists \delta_0$ tale che $(y(t), p(t)) \in C \doteq \{\delta_0 \leq V(y,p) \leq K\}$ e, chiamato L l'ω-limite della soluzione, si ha che L è un compatto privo di punti stazionari.
  Per il teorema di Poincaré-Bendixon L deve essere una orbita periodica non costante; tuttavia è facile mostrare che il sistema in questione non può avere orbite periodiche non costanti, pertanto questo secondo caso non si verifica.

Di conseguenza il sistema è <u>ASINTOTICAMENTE STABILE</u>