Note Title 2021-05-06

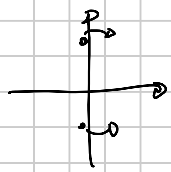
$$H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

X soluzione controllo ottimo $\iff \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}(A-GX)$

$F = -RB^TX$

$\Lambda(A-GX) \subset LHP$

Numericamente, U è un sottosp. inv. di una $H+\Delta H$ $\quad \|\Delta H\| / \|H\| = O(u)$



In casi analoghi i problemi si risolvono

es QR per matrici simmetriche produce autoval. reali esatti

$B=B^T \implies$ autovalori calcolati sono autoval. esatti di $B+\Delta B$, $\Delta B = \Delta B^T$

es QR reale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad A+\Delta A \quad \Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Esiste un alg. strutturato per questo problema?

Domanda 1: quali trasformazioni sono tali che H Ham $\implies S^{-1}HS$ Ham.

(H Hamiltoniana $\iff -H^*J = JH \iff$ anti-autoaggiunta risp. a $\langle u,v\rangle_J = u^*Jv$, $\quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$)

$\iff H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ con $B=B^T$, $C=C^T$, $D=-A^T$

R: le matrici ortogonali rispetto a questo prodotto scalare, cioè

$$\{ S : S^*JS = J \} \text{ matrici simplettiche} \qquad \forall u,v \quad \langle Su, Sv\rangle_J = \langle u,v\rangle_J$$

Lemma: S simplettica, H Hamiltoniana $\implies S^{-1}HS$ Hamiltoniana

Dim: $S^*JS = J \qquad H^*J + JH = 0$

$$(S^{-1}HS)^*J + J(S^{-1}HS) \overset{?}{=} 0$$

$$S^*H^*S^{-*}J + JS^{-1}HS = S^*H^*\cancel{S^{-*}}\cancel{S^*}JS + S^*J\cancel{S}\cancel{S^{-1}}HS = S^*\underbrace{(H^*J+JH)}_{=0}S$$

__Oss__: S simplettica __non__ implica $\|v\| = \|Sv\|$, anzi, S può essere arbitrariamente mal condizionata __es__: $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-T} \end{bmatrix}$ è simplettica

(e può avere $\|S\|$ arbitrariamente grande)

$$S^T J S = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = J$$

Situazione ideale: trasformo H facendo cambi di variabile successivi

$H \to S^{-1} H S$ in cui S è sia $\underbrace{\text{simplettica}}_{\text{preserva Hamiltonianità}}$ che $\underbrace{\text{ortogonale}}_{\text{stabilità numerica}}$

Sono ortosimplettiche:

1) $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ con $Q = Q^{-T}$

2) $$\begin{array}{c|c|c} & k & n+k \\ \hline k & \begin{matrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & \\ & s & \\ & & 0 \end{matrix} \\ \hline n+k & \begin{matrix} 0 & & \\ & -s & \\ & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array} = G(k, n+k, \vartheta)$$

"Laub trick": sia $H = UTU^*$ una forma di Schur, con $\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$

Allora, $\boxed{U_{11}^* U_{11} + U_{21}^* U_{21} = I}$. In più, avevamo notato che

se $U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix}$ spanna il sottosp. inv. stabile, allora $U_1^* J$ spanna il sottosp. inv. antistabile di H (autoval. nel RHP) e quindi sono ortogonali;

$$0 = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \boxed{U_{11}^* U_{21} - U_{21}^* U_{11} = 0}$$

Usando queste relazioni, dimostro che $V = \begin{bmatrix} U_{11} & -U_{21} \\ U_{21} & U_{11} \end{bmatrix}$ è ortosimplettica

difatti: $\begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{21}^* \\ -U_{21}^* & U_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & -U_{21} \\ U_{21} & U_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, e ✓

$$\begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{21}^* \\ -U_{21}^* & U_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & -U_{21} \\ U_{21} & U_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{21}^* & U_{11}^* \\ -U_{11}^* & -U_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & -U_{21} \\ U_{21} & U_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad ✓$$

in più, $V^* H V = \begin{bmatrix} \diagdown & \blacksquare \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}$

$H = UTU^* \qquad HU = UT \qquad H \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} T_{11}$

$$= \begin{bmatrix} U_{11} & * \\ U_{21} & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & -U_{21} \\ U_{21} & U_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} T_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

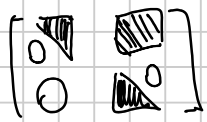
$$HV = H \begin{bmatrix} U_{11} & * \\ U_{21} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & -U_{21} \\ U_{21} & U_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} T_{11} & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Però, $V^* H V = V^{-1} H V$ è Hamiltoniana $\Rightarrow$ è $\begin{bmatrix} T_{11} & R_{12} \\ 0 & -T_{11}^T \end{bmatrix}$ $R_{12} = R_{12}^T$

Questo mostra questo teorema:

Sia H Hamiltoniana $\boxed{\text{con } (A,B) \text{ controllabile, } G \succeq 0,\ Q \succeq 0,}$ allora esiste V ortogonale e simplettica tale che

$$V^* H V = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & -R_{11}^* \end{bmatrix}$$ con R_{11} tr. sup. e $R_{12} = R_{12}^T$

= 

"Hamiltonian Schur form".

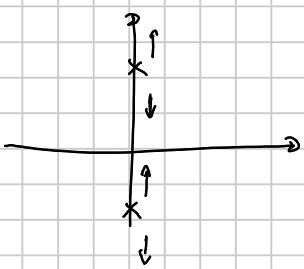
"curse of Van Loan".

Le ipotesi in rosso sono necessarie. ES: $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ha autoval. $\pm i$

e non riesco a scriverla come $V^* H V = \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & -\bar{r} \end{bmatrix}$ con $s = \bar{s}$

perché $-\bar{i} = i$ $\Rightarrow$ non riesco ad avere i e $-i$ sulla diagonale

(e in gen. per ogni matrice Hamiltoniana con autovalori immag. di molt. dispari).



Quindi esistono matr. Hamilt. <u>senza</u> forma di Schur Hamiltoniana.

Soluzione: un'altra decomposizione diversa [Chu-Liu-Mehrmann]

<u>Teo</u>: H Hamiltoniana, esistono U, V ortosimplettiche tali che

$H = U R V^T$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} =$$  R_{11}, R_{22}^T tr. sup.

<u>Nota</u>: R <u>non</u> è Hamiltoniana e <u>non</u> ha gli stessi autovalori di H

$$H = URV^T \qquad U^*JU = J, \qquad V^*JV = J \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

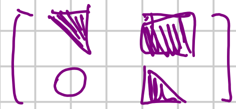
$$H^T = VR^TU^T \qquad U^TJ = JU^{-1} = JU^T \qquad JV = VJ$$

$$H^TJ = -JH \;\Updownarrow\; H^T = -JHJ^{-1} = JHJ \qquad H = J^{-1}H^TJ^{-1} = JH^TJ$$

$$H = JH^TJ = \underbrace{JV}R^T\underbrace{U^TJ} = VJR^TJU^T$$

$$JR^TJ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11}^T & 0 \\ R_{12}^T & R_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{12}^T & R_{22}^T \\ -R_{11}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{22}^T & R_{12}^T \\ 0 & -R_{11}^T \end{bmatrix}$$

$$H = U\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}V^T = V\begin{bmatrix} -R_{22}^T & R_{12}^T \\ 0 & -R_{11}^T \end{bmatrix}U^T$$



$$H^2 = U\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}V^TV\begin{bmatrix} -R_{22}^T & R_{12}^T \\ 0 & -R_{11}^T \end{bmatrix}U^T = U\begin{bmatrix} -R_{11}R_{22}^T & * \\ 0 & -R_{22}R_{11}^T \end{bmatrix}U^T$$

Come posso da qui ad autovalori/autovettori di H? Idea: faccio fatt. di Arnoldi partendo da $U\cdot v_{i_1}$ dove v_i è un autovett. di $-R_{11}R_{22}^T$. Sono autovett. di H^2 $\Rightarrow$ breakdown al secondo step $\Rightarrow$ posso usarlo per calcolare esattamente autovalori/autovettori di U

$[Uv_i, HUv_i]$ è un sottosp. invariante per H.

Versione triangolare-Hessenberg della fatt. URV:

es $n=3$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{array}\right] \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}H}_{H_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right] \qquad \underbrace{G(1,n+1)H_1}_{H_2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ \hline 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}H_2}_{H_3} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ \hline 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right] \qquad \underbrace{H_3\begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & Q^T \end{bmatrix}}_{H_4} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ \hline 0 & x & 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

$$\underbrace{H_4\, G(2,n+2)}_{H_5} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right] \qquad \underbrace{H_5 \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}}_{H_6} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{array}\right]$$

Ora ignoro riga e colonna 1 di ogni blocco e continuo sulle successive $2:n$, $2:n$

Arrivo alla fine a
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ \hline 0 & 0 & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right].$$

Prossima lezione: algoritmi basati su $\operatorname{sign}(H)$

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right) \qquad X_0 = H$$