Note Title 2021-05-11

Controllo ottimo $\iff A^T X + XA + Q - XGX = 0 \quad \Lambda(A-GX) \subset LHP$

$$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} S \qquad S = A - GX$$

$\operatorname{sign}(H)$ ha n autoval. -1 e n autoval. 1

e $\ker(\operatorname{sign}(H) + I) = \operatorname{span}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$

Algoritmo:

$X_0 = H, \qquad X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right).$

dovrebbe avere dim. n

Una volta arrivati a convergenza, calcolo $\ker(X_\infty + I) = \operatorname{span}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$, $X = U_2 U_1^{-1}$

Lemma: ad ogni passo, X_k Hamiltoniana

(Hamiltoniana $\iff \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ con $B = B^T$, $C = C^T$, $D = -A^T$

$\iff H^* J + JH = 0 \quad , J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\iff JH$ simmetrica — difatti, $(JH)^* = H^* J^* = -H^* J$)

Dim: 1) se H Hamiltoniana (e invertibile) allora H^{-1} è Hamiltoniana

dim: $0 = H^{-*}(H^* J + JH)H^{-1} = JH^{-1} + H^{-*} J$

2) se H_1, H_2 Hamiltoniane, allora $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ è Hamiltoniana

dim: $\frac{1}{2}(H_1 + H_2^*)J + J\frac{1}{2}(H_1 + H_2) = \frac{1}{2}(H_1^* J + JH_1) + \frac{1}{2}(H_2^* J + JH_2) = 0$

In aritmetica di macchina, però inv( ) non assicura che

inv(H)' * J + J * inv(H) == 0.

Idea: modifico l'iterazione in modo che lavori con matrici simmetriche

Riscriviamo l'iterazione in termini di $Z_k := JX_k$, simmetrica ed agn: passo.

$$Z_{k+1} = J X_{k+1} = J\ \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) = \frac{1}{2}\left(Z_k + J(J^{-1}Z_k)^{-1}\right) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{Z_k}_{\text{simm.}} + \underbrace{J Z_k^{-1} J}_{\text{simm.}}\Big)$$

$$J\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ -A & -B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D & C \\ B & -A \end{bmatrix}$$

Possiamo incorporare scaling:

$$Z_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\sigma_k Z_k + \sigma_k^{-1} J Z_k^{-1} J\right)$$ per $\sigma_k > 0$, ad es. scelgo σ_k in modo che $1 = \det(\sigma_k Z_k) = \sigma_k^{2n} \det(Z_k)$

Ricordiamo che nell'iteraz. segno, se definiamo $\boxed{Y_k := (I - X_k)^{-1}(I + X_k)}$ (cioè $c(X_k)$ dove $c(x) = \frac{1+x}{1-x}$), allora l'it. segno si riscrive in termini delle Y_k come $Y_{k+1} = -Y_k^2$

$$\lambda \in \Lambda(X_k) \iff \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \in \Lambda(Y_k)$$

$$\lambda \in LHP \iff \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \in \text{Disco unitario } \{|z| < 1\}$$

$$\lambda \in \Lambda(\underset{H}{\underset{\parallel}{X_0}}) \Rightarrow \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \in \Lambda(Y_0) \Rightarrow -\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{2^k} \in \Lambda(Y_k)$$

Lemma: H Hamiltoniana $\Rightarrow (I-H)^{-1}(I+H)$ simplettica

Dim.:

simplettica $\iff J = (I+H)^*(I-H)^{-*} J (I-H)^{-1}(I+H)$

commutano   commutano

$$\iff (I-H)^* J (I-H) = (I+H)^* J (I+H)$$

$$\iff \cancel{J} - H^*J - JH + \cancel{H^*JH} = \cancel{J} + H^*J + JH + \cancel{H^*JH}$$

$$\iff -2H^*J = 2JH \iff H \text{ Hamiltoniana}$$

IT. segno $\iff$ costruisco $Y_0 = (I-H)^{-1}(I+H)$ simplettica, e la elevo al quadrato ripetutamente.

Numericamente, gli autovalori $-\left(\frac{1+\lambda_0}{1-\lambda_0}\right)^{2^k}$ che convergono a ∞ possono dare problemi.

Trucco: mi scrivo Y_k in una forma fattorizzata particolare:

$$Y_k = \begin{bmatrix} I & G_k \\ 0 & F_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ H_k & I \end{bmatrix}. \qquad E_k, F_k, G_k, H_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Si riescono a dimostrare un po' di cose:

1) Y_k simplettica $\iff$ $\boxed{G_k = G_k^*, \ H_k = H_k^*, \ E_k = F_k^*}$

2) Si riesce a calcolare la fatt. di Y_{k+1} direttamente da quella di Y_k:

$$\begin{cases} E_{k+1} = -E_k (I - G_k H_k)^{-1} E_k \\ G_{k+1} = G_k + E_k^* G_k (I - H_k G_k)^{-1} E_k^* \\ H_{k+1} = H_k + E_k^* H_k (I - G_k H_k)^{-1} E_k \end{cases} \qquad (*)$$

(e le inverse esistono)

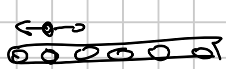
3) Quando $k \to \infty$, $E_k \to 0$, $0 \preceq -H_1 \preceq -H_2 \preceq -H_3 \preceq \dots \preceq X$

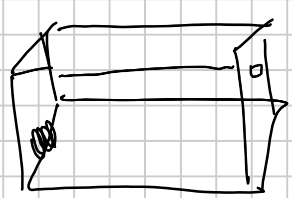
e $-H_k \to X$ sol. stabilizzante dell'eq. di Riccati

La convergenza è quadratica, $\|E_k\| = O(\rho^{2^k})$ $\|X + H_k\| = O(\rho^{2^k})$ per $\rho \in [0,1)$.

Le (*) sono un modo alternativo di riscrivere l'iteraz. segno "structured doubling algorithm".

Stesso costo comp. dell'iterazione segno.

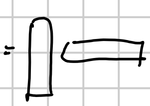




Problemi di controllo arrivano anche in scala molto grandi.

Gli algoritmi $O(n^3)$ non sono adatti a grandi dimensioni.

Come è fatto un problema di controllo su scala grande?

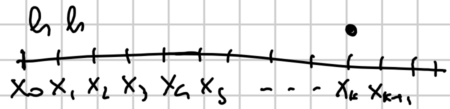
- ▶ A larga e sparsa, spesso $\Lambda(A) \subset LHP$ già di suo
- ▶ B alta e magra $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $n \gg m$
- ▶ $Q = C^T C$ con bassa e larga, $Q =$  $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ $p \ll n$

Problema: anche per un problema di questo tipo, solitamente $X \succeq 0$ e densa $\rightsquigarrow O(n^2)$ memoria

Soluzione: in molti casi, gli autoval. di X decrescono velocemente, quindi $X \approx ZZ^*$ con $Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $k \ll n$.

Una delle idee: converto il problema in tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ in un problema a tempo discreto $x_{k+1} = \hat{A}x_k + \hat{B}u_k$

Metodo dei trapezi:



$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = \frac{1}{2}\left(Ax_k + Bu_k + Ax_{k+1} + Bu_{k+1}\right)$$

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)x_{k+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)x_k + B\,\frac{u_k + u_{k+1}}{2}$$

$$x_{k+1} = \underbrace{\left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)}_{\hat{A}}x_k + \underbrace{\left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}B}_{\hat{B}}\,\frac{u_k + u_{k+1}}{2}$$

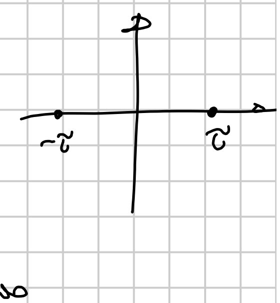
Questo modo di convertire un problema continuo in uno discreto preserva la stabilità:

Lemma: $\Lambda(A) \subset LHP \iff \Lambda(\hat{A}) \subset$ disco unitario

$$\hat{A} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right) = \left(\tau I - A\right)^{-1}\left(\tau I + A\right) = c_\tau(A) \qquad \tau = \frac{2}{h} > 0$$

è la funzione di matrice $c_\tau(x) = \dfrac{\tau + x}{\tau - x}$

La mappa c_τ è tale che $c_\tau(LHP) =$ disco unitario



$z \in LHP \iff z$ è più vicino a $-\tau$ che a τ $\iff \dfrac{|\tau + z|}{|\tau - z|} < 1$

$\iff c_\tau(z) \in$ disco unitario

c_τ nota come "trasformata di Cayley"

Nella prossima lezione: trasformiamo l'eq. di Lyapunov $AX + XA^* + BB^* = 0$ nell'eq. di Stein $X - \hat{A}X\hat{A}^* = 2\hat{B}\hat{B}^*$

e useremo $X_{k+1} = 2\hat{B}\hat{B}^* + \hat{A} X_k \hat{A}^*$ per risolverla