ESERCIZIO 51

U un aperto di $\mathbb{C}$

$u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice armonica se

$\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - i\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta}$$

1) Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

e $f(z) = u(z) + i\, v(z)$ $\quad u, v : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f = \Delta u(z) + i\, \Delta v(z)$$

$$= 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right) = 4 \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u = \Delta v = 0.$$

2) $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica $\Delta u = 0$. (C^2)

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

ω è una forma chiusa. $\omega = \underline{a}\, dx + \underline{b}\, dy$

con a e b C^1.

Basta verificare $\boxed{\dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{\partial b}{\partial x}}$

Nel nostro caso otteniamo

$$-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \underset{\text{ARMONICA}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x}$$

ω è chiusa.

3) U semplicemente connesso. $u : U \to \mathbb{R}$ $\Delta u = 0$

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \text{forma chiusa.}$$

$\Rightarrow$ ω è esatta $\omega = dv$ $v : U \to \mathbb{R}$.

e v è C^2 $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}}$ che è C^1

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}}$$ che è C^1 v è C^2.

Sia $f(z) = u(z) + i\,v(z) : U \longrightarrow \mathbb{C}$.

f è C^2.

f è olomorfa. $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$.

$f = u + iv \qquad \dfrac{\partial}{\partial \bar z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} f = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + i\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + i\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = 0$$

e quindi f è olomorfa.

$\Rightarrow \quad f$ è $C^\infty \quad \Rightarrow u$ e v sono C^∞

Se u è armonica e U è semplicemente connesso $\exists\, f$ olomorfa tale che $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ e u è C^∞.

5) $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad C^2$ e $\Delta u = 0$.

dimostrare che U è C^∞.

Dire che $\underline{u \text{ è } C^\infty}$ in z_0 vuol dire che $\exists\, V = \underline{B(z_0, \varepsilon)}$ tale che $u|_V$ è C^∞.

quindi basta verificare che $u|_V$ è C^∞.

ma V è semplicemente connesso e per il punto precedente u è C^∞.

ESERCIZIO 57

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \lim_{R \to +\infty} \underline{\int_0^R \frac{\sin(t)}{t}\, dt}.$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

In particolare se $z = t \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Im} f = \frac{\sin t}{t}$.

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt = \lim_{R \to +\infty} \int_{1/R}^1 \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \boxed{\lim_{R \to +\infty} \boxed{\int_{1/R}^R \frac{\sin t}{t}\, dt.}}$$

$$= \operatorname{Im}\left(\int f(z)\, dz \right)$$

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right) \qquad \gamma_R : \left[\frac{1}{R}, R\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma_R(t) = t$$

$$\| $$

$$\int_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{e^{it}}{t}\, dt$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \; : \; \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{olomorfa.}$$

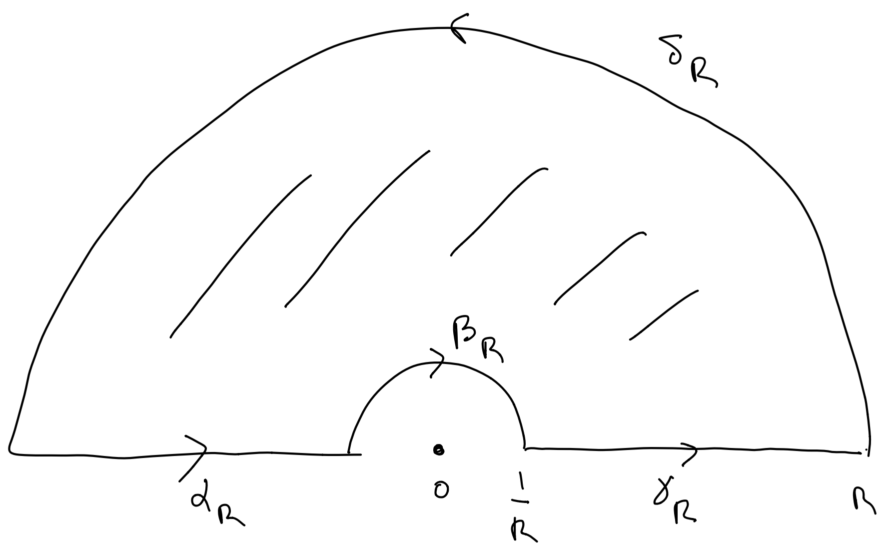
e in 0 ha $\frac{1}{z} \underbrace{e^{iz}} = \boxed{\frac{1}{z} g(z)}$ $\quad g(0) \neq 0$

in 0 ha un polo di ordine 1.

$$\operatorname{Res}_{z=0}(f) = \operatorname{Res}(f, 0) = g(0) = 1.$$

$$g(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 \ldots$$

$$f = \frac{g_0}{z} + g_1 + \ldots \qquad \operatorname{Res}(f, 0) = g_0 = g(0)$$



1° oss

$$\int_{\alpha_R \times \beta_R \times \gamma_R \times \delta_R} f(z)\, dz = 0.$$

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\alpha_R} f(z)\, dz\right) = \operatorname{Im}\left(\int_{-R}^{-1/R} \frac{e^{it}}{t}\, dt\right) =$$

$$= \int_{-R}^{-1/R} \frac{\sin t}{t}\, dt \overset{s=-t}{=} \int_{1/R}^{R} \frac{\sin s}{s}\, ds$$

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\alpha_R} f(z)\right) = \underline{\operatorname{Im}\left(\int_{\gamma_R} f(z)\right)}$$

SECONDO

$$\int_{\beta_R} f(z)\, dz.$$

[h meromorfa con un polo semplice in 0.

$$h(z) = \frac{a}{z} + l(z)$$

$$\int h(z)\, dz = 2\pi i a$$

cerchio di raggio ε

$\uparrow$ il residuo.

NON È VERO $\displaystyle\int_{\frown} h(z)\,dz = \pi i a$

mezzo cerchi

Sia $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ $\quad t \in [0, \pi]$.

$$\int_{\varphi_\varepsilon} h(z)\,dz = \underbrace{\int_{\varphi_\varepsilon} \frac{a}{z}\,dz}_{} + \int_{\varphi_\varepsilon} \underbrace{\ell(z)\,dz}_{}$$

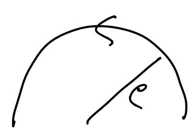
$\boxed{\ell(z)dz}$

con ℓ olomorfa. $\ell(z)dz$ è una forma lineare

$\ell(z)dz = d\big(k(z)\big)$ con k olomorfa.]

$$\int_{\varphi_\varepsilon} h(z)\,dz = \pi i a + \underbrace{\int_{\varphi_\varepsilon} dk(z)}_{}$$

$$= \pi i a + \big(k(-\varepsilon) - k(\varepsilon)\big)$$

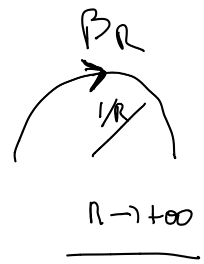


$$\lim \int h(z)\,dz = \pi i a + \cancel{k(0)} - \cancel{k(0)} = \pi i a$$

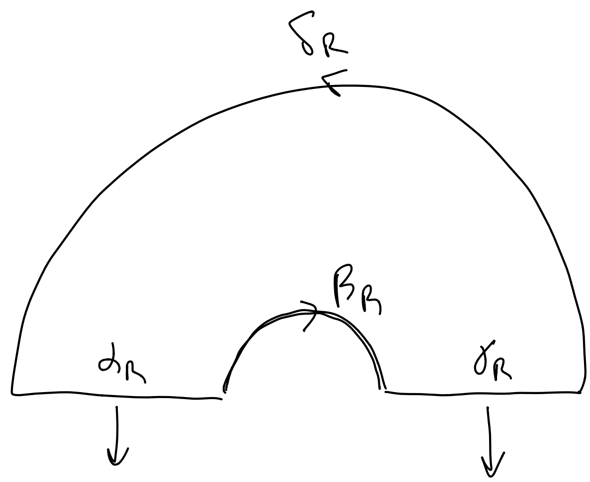
$$\rho \to 0 \qquad \int_{\varphi_\rho}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\varphi_\rho} h(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}(h, 0)$$

SOLO SE IL POLO
DI h È SEMPLICE.



$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\beta_R} f(z)\, dz = -\pi i \underbrace{\operatorname{Res}(f, 0)}_{=1} = \boxed{-\pi i}$$



$$\int_{\delta_R} f(z)\, dz$$

$\gamma_R = Re^{it}$ $\qquad \gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$.

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{\cancel{R}\cancel{e^{it}}}\, \cancel{R}\, i\, \cancel{e^{it}}\, dt.$$

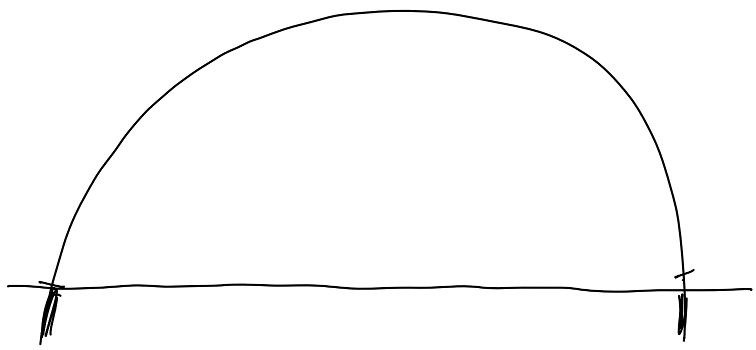
$$i \int_0^{\pi} \underbrace{e^{iRe^{it}}}\, dt.$$

$$\left| e^{iRe^{it}} \right| = \left| e^{iR(\cos t + i \sin t)} \right| = $$

$$= e^{-R \sin t}$$

per $t=0$

$e^{-R\sin t} \to 0$



Dimostro $\displaystyle \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0.$

$\quad //$

$$\lim_{R\to+\infty} i \int_0^{\pi} e^{iRe^{it}}\, dt. = 0$$

$$\lim_{R\to 0} \int_0^{\pi} \left| e^{iRe^{it}} \right| dt = 0.$$

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\, dt = 2 \boxed{\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\, dt}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\, dt = \int_0^{\varepsilon} \underbrace{e^{-R\sin t}}\, dt + \underline{\int_{\varepsilon}^{\pi/2} e^{-R\sin t}\, dt \le}$$

$$\le \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} e^{-R\sin\varepsilon}\, dt$$

$$= \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \underbrace{e^{-R\sin\varepsilon}}_{\downarrow\, 0}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\, dt \le \varepsilon.$$

poiché ε è a piacere $\lim = 0$.

$$0 = \lim_{R\to+\infty} \mathrm{Im} \overbrace{\int f(z)\, dz}^{0 \,=} =$$

$$\underset{m}{\alpha_R} \times \beta_R \times \underset{m}{\gamma_R} \times \delta_R$$

$$= 2 \lim_{R \to +\infty} \int_{1/R}^{R} \frac{\sin(t)}{t} dt - \mathrm{Im}(\pi i) + 0.$$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{1/R}^{R} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

TEOREMA DELLA MAPPA APERTA

U aperto connesso di $\mathbb{C}$

$f: U \to \mathbb{C}$ non costante

allora f è aperta.

PER SEMPLICITÀ SUPPONIAMO

$$\boxed{f(0) = 0}$$

$f(z) = 0$ $z = 0$.

Esiste un cerchio di raggio ε. tale che se $|w| \leq \varepsilon$.

allora $Z(\boxed{f(z) - w}) = Z(f(z))$

in una pallina di raggio δ fissato intorno a 0. ///

$az + bz^2 - -$

TEOREMA DEL DINI

Supponiamo $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e $f'(z_0) \neq 0$. Allora esiste un intorno U_1 di z_0 e un intorno U_2 di $f(z_0) = w$.

tali che $f|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$ è bigettiva

e l'inversa $g = (f|_{U_1})^{-1}$ è olomorfa.

dim. Possiamo assumere $z_0 = 0$ $f(z_0) = 0$.

$$f : B(0, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{df_z = f'(z)\, dz} \qquad f'(0) \neq 0.$$

è $\mathbb{C}$-lineare. $df_0 : \underset{\mathbb{C}}{\overset{\|}{\mathbb{R}^2}} \longrightarrow \underset{\mathbb{C}}{\overset{\|}{\mathbb{R}^2}}$

ed è la moltiplicazione per $f'(0) \neq 0$.

In particolare il differenziale è invertibile.

Per il teorema del Dini esistono U_1 e V_1 intorni di z_0 e $w_0 = f(z_0)$ come richiesto dal teorema e $g = f|_{U_1} : V_1 \longrightarrow U_1$

con g C^1.

Inoltre sappiamo $dg_{f(z)} = (df_z)^{-1}$

$\uparrow$ $\mathbb{C}$ liner. $\qquad$ $\uparrow$ $\mathbb{C}$-lineare. $\quad f'(z)$.

è la moltiplica per $\dfrac{1}{f'(z)}$.

g è C^1 e dg è $\mathbb{C}$-lineare $\Rightarrow$ g è olomorfa
#

SIMILMENTE ESISTE UNA VERSIONE OLOMORFA DEL TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA.

TEOREMA (DESCRIZIONE LOCALE DELLE FUNZIONI OLOM.)

Sia $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa. $f(z_0) = 0$

$\mathrm{ord}_{z_0}(f) = n$

Allora esiste un cambiamento di coordinate in partenza ($\exists\, h : U_1 \to V_1$ V_1, U_1 int. di z_0 $h(z_0)=z_0$ V_1 int. di z_0 e h olomorfa invertibile e con inversa olomorfa) tale che

$$f(z) = (h(z) - z_0)^n$$

dim Assumiamo $z_0 = 0$. $\mathrm{ord}\, f = n \geq 1$

$f(z) = z^n g(z) \qquad a = g(0) \neq 0$

esiste una funz $l(z)$ tale che $l(z)^n = g(z)$ definita in un intorno di $z=0$.

Infatti. considero la funz $m(z) = z^n$.

e sia $b \neq 0$ tale che $b^n = a \neq 0$

$m(b) = a$. $\quad m'(b) = n b^{n-1} \neq 0$.

$\exists$ μ definita in un intorno di a tale che $\mu(a) = b$ e μ è l'inverso di m.

$$m : \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad m'(b) \neq 0.$$
$$b \longrightarrow a \neq 0$$
$$z \longrightarrow z^n$$

$$m|_{U_1} \qquad U_1 \xrightarrow{m} V_1 \qquad \text{biy.}$$
$$U_1 \xleftarrow{\mu} V_1$$

μ olomorfa $\qquad n(a) = b$.

$$(\mu(z))^n = z.$$

$$g : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$0 \longrightarrow a$$

Se R è abb piccolo per continuità

$g(B(0,R)) \subset V_1 \ni a$

$$
\begin{aligned}
g:\ B(0,R) &\longrightarrow V_1 \xrightarrow{\ \mu\ } U_1\\
0 &\longrightarrow e \longrightarrow b
\end{aligned}
$$

$$\ell = \mu \circ g \qquad \ell(0) = b$$
$$\ell(z)^n = g(z).$$

$$f(z) = z^n g(z) = \underline{(z\,\ell(z))}^n$$

per $z \in B(0,R)$

$$z\,\ell(z) = h(z) \qquad\qquad f(z) = h(z)^n$$

$$h'(0) = 1\,\underline{\underline{\ell(0)}} + 0\cdot \ell'(0) = b \neq 0.$$

$$h'(0) \neq 0.$$

Di nuovo a meno di restringersi ad un intorno di 0 per ~~il~~ il teorema rispettivo che h ha un'inversa $h(0)=0$

$$f(z) = h(z)^n.$$

#

TEOREMA

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "\pi"] & \tilde{x}_0 \\
Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X & \text{riv.}
\end{tikzcd}
$$

$Y_0 \longrightarrow x_0$

$$\exists\ \tilde{f} \text{ se e solo se } f_*\left(\pi_1(Y, y_0)\right) \subset \pi_*\left(\pi_1(E, \tilde{x}_0)\right)$$

X semiloc. sp. conn. $\qquad E_1 \quad E_2$ conn.

$(E_1, x_1) \quad (E_2, x_2)$

$\pi_1 : E_1 \longrightarrow X \qquad \pi_1(x_1) = x_0$

$\pi_2 : E_2 \longrightarrow X \qquad \pi_2(x_2) = x_0$

$$H_1 = \pi_{1*}\left(\pi_1\left(\underline{E_1, x_1}\right)\right)$$

$$H_2 = \pi_{1*}\left(\pi_1(E_2, x_2)\right) \qquad H_2 = \underset{\substack{\cap \\ \pi_1(X, x_0)}}{g^{-1}} H_1 g$$

$$\pi_1\big(E_1, \underset{}{\overset{x_1' \\ \parallel}{x_1 \cdot g}}\big)$$

γ il sollevamento di g

$\gamma(0) = x_1 \qquad \gamma(1) = x_1'$

$$\pi_1(E_1, x_1') = \overline{\gamma^{-1} * \pi_1(E_1, x_1) * \gamma}$$

$x_1' \longrightarrow x_1 \circlearrowleft x_1 \longrightarrow x_1'$

$$\boxed{\underbrace{\pi_{1*}\left(\pi_1(E_1, x_1')\right)}_{H_1'}} = g^{-1} H_1 g = \boxed{H_2}$$

$\varphi \qquad E_2 \qquad x_2$

$$\begin{tikzcd} I = E_1 \arrow[r] & X \\ x_1' \arrow[r] & x_0 \end{tikzcd}$$

$$\varphi : E_1 \longrightarrow E_2 \qquad x_1' \longrightarrow x_2$$

$$\psi : E_2 \longrightarrow E_1 \qquad x_2 \longrightarrow x_1'$$

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] & x_1' \\ E_1 \arrow[ur, "\psi \circ \varphi"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X & \\ x_1' \arrow[uurr] & & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \psi \circ \varphi = id$$