TEOREMA

$f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa $z_0 \in U$ $f(z_0) = 0$

e $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = n \geq 1$ $[f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ $g(z_0) \neq 0]$.

esistono intorni V_1 e V_2 di z_0, $h : V_1 \to V_2$
olom e bigettiva con inversa olomorfa con $h(z_0) = z_0$
tale che

$$f(z) = \left(h(z) - z_0\right)^n$$

equivalentemente esiste un intorno W_1 di 0 e un
intorno W_2 di z_0 e $\boxed{k : W_2 \longrightarrow W_1}$ olom, big.
e con inversa olomorfa con $k(z_0) = 0$.
tale che

$$f(z) = k(z)^n$$

- $k(z) = h(z) - z_0$

$h : z_0 \longrightarrow z_0$.

$k : z_0 \longrightarrow 0$.

COROLLARIO

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

f iniettiva allora $f'(z_0) \neq 0 \quad \forall z_0 \in U$.

dim $\quad z_0 \in U \qquad f(z_0) = w_0$

$$f_1(z) = f(z) - w_0 \qquad f_1(z_0) = 0.$$

$$f_1' = f' \qquad \text{Dimostro } f_1'(z_0) \neq 0.$$

dire che $f'(z_0) \neq 0$ ovvero $f_1'(z_0) \neq 0$
è come dire che $\operatorname{ord}_{z_0}(f_1) = 1$

p.a. $\quad \operatorname{ord}_{z_0}(f_1) = n > 1$

$\exists\, h$ come nel teorema precedente
tale che $\quad f_1(z) = (h(z) - z_0)^n$

Sia $\quad \boxed{f_1(z) = w}$ con w piccolo $\neq 0$.

$$(h(z) - z_0)^n = w. \qquad w = v^n \qquad v \neq 0$$

$$h(z) - z_0 = v \;,\; v\omega \;,\; \dots \; v\omega^{n-1}$$

dove $\omega = e^{2\pi i/n}$

$$h(z) = z_0 + v \qquad h(z) = z_0 + v\omega \qquad h(z) = z_0 + z_0\omega^{n-1}$$

Se w è piccolo e quindi anche v è piccolo ognuna di queste equazioni ha soluzione.

$$z_1, \dots, z_n$$

con z_i distinti $\quad h(z_1) = z_0 + v \neq z_0 + \omega v = h(z_2)$

quindi abbiamo trovato almeno n soluzioni di $f_1(z) = w$

ma $f_1 = f - w_0$ è iniettiva e poiché $n > 1$ è assurdo

#

COROLLARIO

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ iniettiva $\quad V = f(U)$

1° oss $\quad V$ è aperto (per il teorema della mappa aperta)

$f : U \longrightarrow V$ bigettiva continua.

e è aperta (per il teorema della mappa aperta)

f è un omeomorfismo.

2° oss $\quad f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U.$

per il teorema del Dini localmente f è invertibile e l'inversa è olomorfa.

$$f: U \longrightarrow V \qquad g = f^{-1}: V \longrightarrow U.$$

e g è olomorfa.

QUINDI $\quad f: U \longrightarrow V$

$g = f^{-1}: V \longrightarrow U$ è olomorfa.

Automorfismi (o Biolomorfismi) di aperti di $\mathbb{C}$.

DEFINIZIONE Sia U un aperto di $\mathbb{C}$

$$\mathrm{Aut}(U) = \{ f: U \to U \text{ bigettive e olomorfe} \}$$

OSS se $f \in \mathrm{Aut}(U) \Rightarrow f^{-1}$ è olomorfa

$\mathrm{Aut}(U)$ sono un gruppo.

IL CASO DI $U = \mathbb{C}$

Se $a \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{C}$

$$f(z) = az + b$$

è un automorfismo di $\mathbb{C}$.

TEOREMA

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{ \underline{f(z) = az+b} : a \neq 0 \text{ e } b \text{ qualsiasi} \}.$$

dim

Sia $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. $f = a_0 + a_1 z + \cdots$

vado a studiare cosa succede all'∞.

- $\overline{B(0,R)} = K$ è un compatto
  $f^{-1}(K)$ è un compatto.

  In particolare $\exists R'$ $f^{-1}(K) \subset B(0,R')$
  se $|z| > R'$ allora $|f(z)| > R$

- Sia R' tale che $|f(z)| > 1$ per $\underline{|z| > R'}$.

$f(z)$

$$w \longrightarrow \frac{1}{w} \longrightarrow f\left(\frac{1}{w}\right) \longrightarrow \frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)} = g(w)$$

$$\frac{1}{w} = z$$

$$\boxed{|w| < \frac{1}{R'}} \qquad |z| > R' \qquad \left|f\left(\frac{1}{w}\right)\right| > 1 \qquad |g(w)| < 1$$

g è olomorfa e $|g(w)| < 1$

$g : \{ w : w \neq 0 \quad |w| < 1/R' \} \longrightarrow \mathbb{C}$

g si estende in modo olomorfo in 0.

$$\boxed{g(w) = w^n h(w)} \qquad \text{con } h(0) \neq 0.$$

$$g(w) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)}$$

$$w^n h(w) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)} \qquad 0 < |w| < \frac{1}{R'}$$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = w^{-n} \frac{1}{h(w)} = w^{-n} k(w)$$

$h(0) \neq 0$
h olomorfa.

$$R'' < \left|\frac{1}{w}\right| \qquad \boxed{0 < |w| < \frac{1}{R''}}$$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \boxed{\sum e_m w^{-m} = } \; w^{-n} h(w)$$

$m \geq 0$

$$= w^{-n} \sum_{k \geq 0} b_\ell w^\ell$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di Laurent queste due serie devono coincidere

Poiché la serie a destra ha un n° finito di termini con esponente negativo deve essere $a_m = 0 \quad m > n$.

quindi $f(z) = a_0 + \dots + a_m z^m$

e dall'iniettività di f segue grado $f = 1$

$$f(z) = a_0 + a_1 z \qquad \text{con } a_1 \neq 0 \quad \#$$

$\mathrm{Aut}(\Delta) \qquad \Delta = \{ z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \}$

<u>oss</u> Δ è omeomorfo a $\mathbb{C}$

<u>oss</u> Δ non è biolomorfo a $\mathbb{C}$

$\nexists \quad f : \Delta \to \mathbb{C}$ invertibile olomorfa.

infatti se $g = f^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \Delta$

g è limitata $\Rightarrow$ g costante. assurdo

#

OSS Se U e V biolomorfi

$f : U \longrightarrow V$ bigettiva olomorfa

$$\underline{Aut(V)} = f \circ \underline{Aut(U)} \circ f^{-1}$$

DEFINIZIONE

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

$a, b \in \mathbb{C}$.

$SU(1,1)$ agisce su Δ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = z$$

è un'azione $g, h \in SU(1,1)$

$$(gh) \cdot z = g(h(z))$$

OSSERVAZIONE $z \in \Delta \Rightarrow \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \in \Delta$.

ovvero se $|z| < 1$ ALLORA $\left| \dfrac{az+b}{} \right| < 1$

$$\left| \bar{b} z + \bar{a} \right|$$

$$|az+b|^2 < |\bar{b}z+\bar{a}|^2$$

$$(az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) < (\bar{b}z+\bar{a})(b\bar{z}+a)$$

$$|a|^2|z|^2+|b|^2+\cancel{a\bar{b}z}+\cancel{b\bar{a}\bar{z}}$$
$$< |b|^2|z|^2+|a|^2+\cancel{\bar{b}za}+\cancel{\bar{a}b\bar{z}}$$

$$\left(|a|^2-|b|^2\right)|z|^2 < |a|^2-|b|^2$$

$$|z|^2 < 1 \qquad |z|<1.$$

QUINDI HO DEFINITO.

$$SU(1,1) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}(\Delta)$$

OSSERVIAMO che $\ker \Phi = \{I, -I\}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \ker \Phi \iff \underline{\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} = z} \quad \forall z \in \Delta.$$

per $z=0$ ottengo $\frac{b}{\bar{a}}=0 \Rightarrow b=0.$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \in \ker \Phi \iff \frac{a}{\bar{a}} z = z \quad \forall z \in \Delta$$

$$a = \bar{a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Ker} \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \quad a^2 - 0 = 1 \right\}$$

$$= \{ \pm Id \}$$

DEFINISCO $\quad PSU(1,1) = SU(1,1) / \{\pm 1\}$

$$PSU(1,1) \xhookrightarrow{\Phi} Aut(\Delta)$$

<u>TEOREMA</u> $\quad \Phi$ È UN ISOMORFISMO.

<u>LEMMA</u> Sia $f : \Delta \to \Delta$ un automorfo. tale che $f(0) = 0$. Allora $f(z) = \lambda z$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$.

<u>dim</u>

$$f, \quad g = f^{-1} : \Delta \to \Delta \qquad f(0) = 0 \quad g(0) = 0.$$

Per il lemma di Schwarz.

$$|f(z)| \leq |z|$$

$$|g(w)| \leq |w| \qquad w = f(z)$$

$$|z| \leq |f(z)|$$

in realtà $\quad |f(z)| = |z| \quad \forall z.$

Per lo stesso lemma $\quad f(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$.

OSSERVAZIONE TUTTI QUESTI AUTOMORFISMI SI OTTENGONO COME IMMAGINE DI UN ELEMENTO DI $SU(1,1)$.

$$\boxed{f(z) = \lambda z} = e^{2i\theta} z.$$

$$SU(1,1) \ni \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} \cdot z = \frac{e^{i\vartheta} z}{e^{-i\vartheta}} = e^{2i\vartheta} z$$

LEMMA

$\forall z_0 \in \Delta \quad \exists g \in SU(1,1)$ tale che

$g(0) = z_0$

dim

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad g(0) = \frac{0 \cdot a + b}{a \cdot \bar{b} + \bar{a}} = \frac{b}{\bar{a}}$$

cerco $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a|^2 - |b|^2 = 1$ e tali che

$$\frac{b}{\bar{a}} = z_0 \qquad b = z_0 \bar{a}$$

$$|a|^2 - |a|^2 |z_0|^2 = 1$$

$$|a|^2 = \frac{1}{\quad} \qquad |z_0| < 1$$

$1 - |z_0|^2$

se a è un qualsiasi numero complesso

con $|a|^2 = \dfrac{1}{1-|z_0|^2}$ e $b = \bar{a} z_0$

allora $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot 0 = z_0$

$\underset{SU(1,1)}{\cap}$

#

<u>dim del teorema</u> $\Phi : PSU(1,1) \longrightarrow Aut(D)$ è isom.

Φ è iniettiva già visto.

Φ è suriettiva

Sia $f \in Aut(\Delta)$. Se $f(0)=0$ sappiamo che è vero. ///

Sia $f(0) = z_0$, per il secondo lemma esiste $g \in PSU(1,1)$ tale che $g \cdot 0 = z_0$

Considero $\underline{g^{-1} \circ f} \in Aut(\Delta)$

$g^{-1} \circ f(0) = g^{-1}(z_0) = 0$.

quindi $g^{-1} \circ f = h \in PSU(1,1)$

quindi $f = g \circ h \in PSU(1,1)$

#

$\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$

$$\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \quad \mathrm{Im}\, z > 0 \}$$

è il semipiano di Poincaré.

OSSERVAZIONE

$f : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \Delta$ $\qquad$ f biolomorfismo.

(bigettiva e olomorfa).

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$f^{-1} = g \qquad g(z) = \frac{z+1}{iz-i}$$

$$g(f(z)) = \frac{\frac{z-i}{z+i} + 1}{i\,\frac{z-i}{z+i} - i} =$$

$$= \frac{z-i + z+i}{} \cdot \frac{\cancel{z+i}}{} =$$

$\cancel{z+i} \qquad i \qquad z-i-z-i$

$$= \frac{2z}{i} \frac{1}{-2i} = z.$$

f e g sono una l'inversa dell'altra.

$f(\mathcal{H}) \subset \Delta \qquad g(\Delta) \subset \mathcal{H}$

devo dimostrare ~~se~~ $\operatorname{Im} z > 0 \quad (z \in \mathcal{H})$

allora $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1$

$$|z-i|^2 < |z+i|^2 \qquad (z-i)(\bar{z}+i) < (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$\cancel{|z|^2} \cancel{+1} - i\bar{z} + iz < \cancel{|z|^2} \cancel{+1} - iz + i\bar{z}$$

$$i(z-\bar{z}) < i(\bar{z}-z) \qquad 2i(z-\bar{z}) < 0$$

$$z - \bar{z} = 2iy. \qquad z = x+iy.$$

$$4i\, iy < 0 \qquad -y < 0 \qquad \boxed{y > 0}$$

$f(\mathcal{H}) \subset \Delta.$

similmente si verifica $g(\Delta) \subset \mathcal{H}.$

$f : \mathcal{H} \longrightarrow \Delta.$

$$\boxed{\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) = f^{-1} \circ \mathrm{Aut}\,\Delta \circ f}$$

vi

$\varphi \in \mathrm{Aut}\,\Delta$

$\boxed{f^{-1} \circ \varphi \circ f} : \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$

$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \ni \psi$

$\varphi = f \circ \psi \circ f^{-1} : \Delta \xrightarrow{\sim} \Delta.$

allora $\psi = f^{-1} \circ \varphi \circ f.$

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \text{ e } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

OSSERVAZIONI

1) $SL(2, \mathbb{R})$ agisce su $\mathcal{H}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

2) $\Psi : SL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$

$\ker \Psi = (\pm \mathrm{Id})$

3) $\Psi : \underline{PSL(2, \mathbb{R})} = SL(2, \mathbb{R}) / \pm 1 \hookrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathcal{H}$

Ψ è un isomorfismo.

1) $\operatorname{Im} z > 0$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R})$

allora $\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$.

$z = x + iy$.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{ax+b+iay}{cx+d+icy}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{\quad + i(ady + a\cancel{cxy} - \cancel{acxy} - bcy)}{|cz+d|^2}\right)$$

$$= \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2} > 0.$$

2) Il calcolo del nucleo è semplice.

3) Ψ è surgettiva $PSL(2,\mathbb{R}) \to \operatorname{Aut} \mathcal{H}$.

I° MODO

$$\parallel$$

$$\underline{\underline{f^{-1} \circ \operatorname{Aut}\Delta \circ f}}$$

dove $f^{-1} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{c} & \bar{b} \end{pmatrix} \circ f$ e verifica che è una trasf. in $PSL(2,\mathbb{R})$.

II° modo

OSS. 1 $PSL(2,\mathbb{R})$ agisce transitiv.

$\forall z_0 \in \mathcal{H} \quad \exists\, g \in PSL(2,\mathbb{R}) \quad g(i) = z_0$

OSS. 2 utilizzato per calcolare le $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ con $\varphi(i) = i$.