Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - II compitino - 20/5/2021

Esercizio 1. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme compatto tale che $(0,0) \in K$.

(1) Si mostri che esiste $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ tale che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus K, x_0) \neq \{1\}$.
(2) È vero che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ si ha necessariamente $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus K, x_0) \neq \{1\}$?
(3) Si supponga ora che K sia, oltre che compatto, anche convesso. Si mostri che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, si ha $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus K, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Soluzione. (1): Poiché K è compatto, esiste una palla $B = B(0,R)$ centrata in 0 tale che $K \subseteq B(0,R)$. Sia $x_0 = (R+1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus B \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus K$, e sia $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus B$, $\gamma(t) = (R+1)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ così che l'immagine di K sia contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus B$, dunque in $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Sappiamo da quanto fatto a lezione che $[\gamma] \neq 1$ in $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0)$, per cui a maggior ragione $[\gamma] \neq 1$ in $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus K, x_0)$.

(2): No: Se $K = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq \|v - (2,0)\| \leq 3\}$, allora K è compatto e non vuoto, $0 \in K$, e scegliendo $x_0 = (2,0)$ otteniamo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus K, x_0) = \pi_1\big(B(2,x_0), x_0\big) = \{1\}$.

(3): Sia R come nella soluzione di (1). Mostriamo che, se $S = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|v\| = R+1\}$, allora $\mathbb{R}^2 \setminus K$ si retrae per deformazione su S. Poiché S è chiaramente omeomorfo ad S^1 (ad esempio tramite la mappa $v \mapsto v/(R+1)$), e le retrazioni per deformazione sono equivalenze omotopiche, ciò implica la tesi.

Sia dunque

$$H\colon (\mathbb{R}^2 \setminus K) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus K \ ,$$
$$H(v,t) = tv + (1-t)(R+1)\frac{v}{\|v\|} \ .$$

L'unica cosa da verificare è che H sia ben definita, ovvero che effettivamente $H(v,t) \notin K$ per ogni $v \notin K$, $t \in [0,1]$. Ciò è dovuto al fatto che, se $\|v\| \geq R+1$, allora $\|H(v,t)\| \geq R+1$, per cui $H(v,t) \notin K$, mentre se $\|v\| \leq R+1$, allora v giace sul segmento che unisce 0 a $H(v,t)$, per cui se $H(v,t)$ appartenesse a K, allora per convessità anche v apparterrebbe a K, il che è assurdo.

Esercizio 2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a}\, dx$$

Soluzione. Sia $f(z) = e^{iz}/(z^2 + a)$. Allora f è meromorfa su $\mathbb{C}$, con poli semplici in $\pm i\sqrt{a}$. Sia $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq R \ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Per $R > \sqrt{a}$, l'unico polo di f contenuto in D_R è $z_0 = i\sqrt{a}$, e si ha

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{e^{iz_0}}{2z_0} = \frac{e^{-\sqrt{a}}}{2i\sqrt{a}} = \frac{-ie^{-\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}} \ .$$

Dunque, per il Teorema dei Residui, per $R > \sqrt{a}$ si ha

$$\int_{\partial D_R} f(z)\, dz = 2\pi i \frac{-ie^{-\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}} = \frac{\pi e^{-\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} \ .$$

Una parametrizzazione positiva di ∂D_R è data dal $\alpha_R * \beta_R$, dove

$$\alpha_R \colon [-R, R] \to \mathbb{C}\,, \qquad \alpha(t) = t$$
$$\beta_R \colon [0,1] \to \mathbb{C}\,, \qquad \beta(t) = Re^{\pi i t}\ .$$

Ora

$$\int_{\alpha_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+a}\,dt + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t^2+a}\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+a}\ ,$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $\sin(t)/(t^2+a)$ è dispari, e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine.

Inoltre, poiché $|e^{iRe^{i\pi t}}| = e^{-R\sin t}$ e $|R^2e^{2\pi it} + a| \geq |R^2e^{2\pi it}| - a = R^2 - a$, si ha

$$|f(\beta(t))| = \frac{|e^{iRe^{i\pi t}}|}{|R^2e^{2\pi it}+a|} \leq \frac{e^{-R\sin t}}{R^2-a} \leq \frac{1}{R^2-a}\ ,$$

da cui

$$\Big|\int_{\beta_R} f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_0^1 f(\beta(t))\pi Rie^{i\pi t}\,dt\Big| \leq \int_0^1 |f(\beta(t))\pi Rie^{i\pi t}|\,dt \leq \int_0^1 \frac{\pi R}{R^2-a}\,dt = \frac{\pi R}{R^2-a}\ .$$

Ne segue che $\lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} f(z)\,dz = 0$.

Ricomponendo il tutto, si ottiene perciò

$$\begin{aligned}\frac{\pi e^{-\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\partial D_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\alpha_R} f(z)\,dz + \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+a}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+a}\,dt\ .\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ e si considerino i tre sottoinsiemi della retta reale (che consideriamo contenuta in $\mathbb{C}$) dati da $I = (-\infty,-1)$, $J = (-1,1)$ e $H = (1,\infty)$.

(1) (6 punti) Si determini il gruppo fondamentale di X;
(2) (9 punti) Sia $p : E \longrightarrow X$ un rivestimento connesso di grado 2. Si dimostri che almeno uno dei seguenti insiemi è sconnesso: $p^{-1}(X\backslash I)$, $p^{-1}(X\backslash J)$ o $p^{-1}(X\backslash H)$

Soluzione. (1): Si considerino gli aperti $U = \{x+iy \in X : x > -1\}$ e $V = \{x+iy \in X : x < 1\}$. U si può retrarre per deformazione sul cerchio di centro 1 e raggio 1 mediante l'omotopia

$$H(z,t) = tz + (1-t)(1 + \frac{z-1}{\|z-1\|}).$$

In particolare $\pi_1(U,i) \simeq \mathbb{Z}$ e è generato da un laccio $\alpha \in \Omega(U,i)$ con origine in i e che fa un cerchio attorno a 1 in senso orario. Similmente V si può retrarre per deformazione sul cerchio di centro -1 e raggio 1 e in particolare $\pi_1(V,i) \simeq \mathbb{Z}$ e è generato da un laccio $\beta \in \Omega(V,i)$ che fa un cerchio attorno a -1 in senso orario. Poiché l'intersezione di U e V è la striscia $\{x+iy \in X : -1 < x < 1\}$ è contraibile. Applicando Van Kampen, ricaviamo che $\pi_1(X,i)$ è il gruppo libero generato da α e β.

Prima di affrontare il secondo punto osserviamo inoltre che $X \setminus I$ si retrae a un cerchio di raggio 1 e centro 1 con una omotopia definita come quella usata per U. In particolare $\pi_1(X\setminus I, i) \simeq \mathbb{Z}$ e è generato da α. Analogamente $X \setminus H$ si retrae al cerchio di centro -1 e raggio 1 e in particolare $\pi_1(X \setminus H, i) \simeq \mathbb{Z}$ e è generato da β.

Infine $X \setminus J$ si retrae, con una omotopia analoga, al centro di cerchio 0 e raggio 2 e il suo gruppo fondamentale è generato da un cammino $\gamma \in \Omega(X \setminus J, i)$ che in $\Omega(X, i)$ è omotopo a $\alpha * \beta$.

(2): Sia $p : E \longrightarrow X$ il rivestimento il rivestimento di grado due e sia $e \in E$ tale che $p(e) = i$. Sia inoltre $K = p_*(\pi_1(E, e)) \subset G = \pi_1(X, i)$. Sappiamo che K è un sottogruppo di indice 2 di G, in particolare non può contenere entrambi i generatori. Abbiamo tre possibilità:

- $\alpha \in K$ e $\beta \notin K$,
- $\beta \in K$ e $\alpha \notin K$,
- $\alpha, \beta \notin K$.

Sia $E_I = p^{-1}(X \setminus I)$ e similmente definiamo E_J ed E_K.

Nel primo caso dimostriamo che E_I è sconnesso. Osserviamo che la restrizione di p a $X \setminus I$, $p_I : E_I \longrightarrow X \setminus I$ è un rivestimento di grado due. Per dimostrare che E_I è sconnesso basta dimostrare che l'azione di monodromia non è transitiva sulla fibra sopra i. Osserviamo che da $\alpha \in K$ ricaviamo che $e \cdot \alpha = e$, infatti abbiamo dimostrato a lezione che K è esattamente il sottogruppo di G che agisce banalmente su e. In particolare $\pi_1(X \setminus I)$, che è generato da α, agisce banalmente sulla fibra e quindi p_I è un rivestimento sconnesso.

Il secondo caso è del tutto analogo e dimostriamo che E_H è sconnesso.

Nel terzo caso osserviamo che essendo K di indice 2, abbiamo che $\gamma = \alpha * \beta \in K$ e ragionando allo stesso modo dimostriamo che E_J è sconnesso.