Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - II scritto - 16/7/2021

Esercizio 1. Sia X lo spazio topologico dato dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, dotato della topologia cofinita (ovvero, un sottoinsieme C di X è chiuso se e solo se $C = \mathbb{R}$ o C è finito).

(1) [8 punti] Sia $A \subseteq X$, e sia $\overline{x} \in X$. Si mostri che $\overline{x} \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$.
(2) [5 punti] Si dica se X sia connesso per archi.

Soluzione. (1): Ricordiamo innanzi tutto che, se esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$, allora senza dubbio $\overline{x} \in \overline{A}$: dato un qualsiasi intorno U di $\overline{x}$, l'insieme $U \cap A$ contiene $\{x_n \mid n \geqslant n_0\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$, ed in particolare non è vuoto. Il viceversa, invece, non vale in tutti gli spazi topologici.

Sia dunque $\overline{x} \in \overline{A}$, e distinguiamo due casi. Sia innanzi tutto A finito. Allora A è chiuso, per cui $\overline{A} = A$, e $\overline{x} \in A$. Di conseguenza, la successione costante $x_n = \overline{x}$ è a valori in A, e converge a $\overline{x}$. Supponiamo ora A infinito. Allora esiste una successione $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ tale che $x_n \neq x_m$ per ogni $n \neq m$. È facile verificare che tale successione tende ad $\overline{x}$ (in effetti, tende ad x per ogni $x \in \mathbb{R}$): se U è un intorno di $\overline{x}$, $\mathbb{R} \setminus U$ è finito, per cui, poiché gli x_n sono a due a due distinti, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geqslant n_0$.

(2): X è connesso per archi: dati $x, y \in X$, se $x = y$ non c'è nulla da dimostrare (il cammino costante in x è continuo e congiunge x ad y), mentre se $x \neq y$, il cammino $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = ty + (1-t)x$ è continuo: esso è infatti iniettivo, per cui rimanda insiemi finiti in insiemi finiti. Ne segue che γ rimanda chiusi in chiusi, da cui la tesi.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee S^1$ il bouquet di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e di S^1 (a meno di omeomorfismo, X non dipende dalla scelta dei punti base utilizzati per definire il bouquet).

(1) [4 punti] Si calcoli $\pi_1(X)$.
(2) [5 punti] Quanti sono i rivestimenti connessi di X di grado 2?
(3) [6 punti] Si determini un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ che sia lo spazio totale di un rivestimento di X di grado 2. (È sufficiente descrivere qualitativamente tale sottoinsieme e la mappa di rivestimento, a questo fine anche un disegno può essere di aiuto.)

Soluzione. (1): Abbiamo visto a lezione che $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ e $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Ricalcando la dimostrazione del fatto che il gruppo fondamentale di $S_1 \vee S_1$ è isomorfo a $\pi_1(S^1) * \pi_1(S^1)$ si ottiene che

$$\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) * \pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})) * \mathbb{Z} \ .$$

(2): Per un risultato dimostrato a lezione, poiché X è semilocalmente semplicemente connesso (ed ammette perciò un rivestimento universale), il numero dei rivestimenti connessi di X di grado 2 è uguale al numero di sottogruppi di indice 2 di $\pi_1(X)$. Poiché ogni sottogruppo di indice 2 è normale, tali sottogruppi sono in bigezione con l'insieme degli omomorfismi surgettivi $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$. Siano a, b generatori rispettivamente di $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ e di $\mathbb{Z}$, e denotiamo con a, b anche le loro immagini in $\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})) * \mathbb{Z}$ tramite le ovvie inclusioni. Per definizione di prodotto libero, per ogni scelta di $a', b' \in \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ esiste un unico omomorfismo $\varphi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ tale che $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Tale omomorfismo è surgettivo se e solo se almeno uno tra a', b' è non nullo. Esistono dunque 3 rivestimenti connessi di X di grado 2.

(3): Poiché $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non ammette immersioni topologiche in $\mathbb{R}^3$, è opportuno che il rivestimento $p\colon E \to X$ in questione sia tale che E non contenga copie di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. A questo scopo, con riferimento alla notazione della soluzione del punto precedente, è ragionevole scegliere il rivestimento associato all'omomorfismo $\varphi\colon \pi_1(X) \to \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ tale che $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. Con tale scelta, un laccio non banale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subseteq X$ si solleva ad un cammino aperto, mentre il cammino chiuso che parametrizza $S^1 \subseteq X$ si solleva a due cammini chiusi. Usando queste informazioni è semplice dedurre che E è omeomorfo allo spazio disegnato in figura. La mappa di rivestimento $p\colon E \to X$ è data dal quoziente per la relazione che

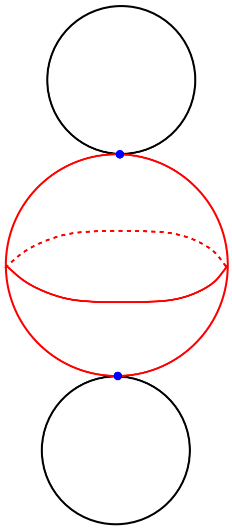

FIGURE 1. Esercizio 2, punto (3): La mappa di rivestimento proietta i punti blu sul punto base di X, proietta S^2 su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subseteq X$, e le due copie di S^1 su $S^1 \subseteq X$.

identifica v con $-v$ per ogni $v \in E$ (assumendo che E sia realizzato in maniera simmetrica rispetto all'origine di $\mathbb{R}^3$).

Esercizio 3. Sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$, e si consideri la 1-forma ω su Ω definita da

$$\omega = \frac{1}{z^2 - 1}\, dz \ .$$

(1) [4 punti] Si dica se ω sia esatta.
(2) [10 punti] Si determini un aperto massimale $\Omega' \subseteq \Omega$ su cui ω sia esatta, cioè un aperto $\Omega' \subseteq \Omega$ con le seguenti proprietà: la restrizione di ω ad Ω' è esatta, e se Ω'' soddisfa $\Omega' \subseteq \Omega'' \subseteq \Omega$ ed ω è esatta su Ω'', allora $\Omega'' = \Omega'$.

Soluzione. (1): Sia $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$, $\gamma(t) = 1 + e^{2\pi i t}$ una parametrizzazione positiva della circonferenza di raggio 1 centrata in 1. Osserviamo che la funzione $f(z) = 1/(z^2 - 1)$ è meromorfa con due poli semplici in 1 e -1, e che

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \frac{1}{2z}(1) = \frac{1}{2}\,, \qquad \mathrm{Res}(f, -1) = \frac{1}{2z}(-1) = -\frac{1}{2}\ .$$

Per il Teorema dei residui si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 1) = \pi i \neq 0\ ,$$

per cui ω non è esatta.

(2): Sia $\Omega' = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, dove con $[-1, 1]$ indichiamo l'usuale intervallo chiuso dell'asse reale. È immediato verificare (ad esempio, dimostrando che $\mathbb{C}^*$ si retrae per deformazione su Ω'), che $\pi_1(\Omega') \cong \mathbb{Z}$, e che $\pi_1(\Omega')$ è generato dalla classe del laccio $\alpha\colon [0, 1] \to \Omega'$, $\alpha(t) = 2e^{2\pi i t}$. Poiché f è una funzione olomorfa, ω è chiusa su Ω, e dunque anche su Ω', e, per quanto visto a lezione, poiché α genera il gruppo fondamentale di Ω' per dimostrare che è esatta è sufficiente verificare che $\int_\alpha \omega = 0$. Tuttavia, α è una parametrizzazione positiva del bordo della palla chiusa di centro 0 e raggio 2, e tale palla contiene i due poli di f. Per il Teorema dei residui si ha allora

$$\int_\alpha \omega = 2\pi i (\mathrm{Res}(f, 1) + \mathrm{Res}(f, -1)) = 0\ .$$

Ciò mostra che ω è esatta su Ω'.

Sia ora Ω'' come nel testo, e supponiamo per assurdo che Ω'' contenga un punto $x_0 \in (-1,1)$ (ovviamente Ω'' non può contenere ± 1 perché questi punti non appartengono ad Ω). Possiamo allora costruire una curva β contenuta in Ω'' e tale che $I(\beta, 1) = 1$ (ad esempio, β può essere una parametrizzazione del bordo della palla di centro 1 e raggio $1 - x_0$). Per il Teorema dei residui, si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 1) = \pi i \neq 0 \ ,$$

per cui ω non è esatta su Ω''.

Vi sono altre possibili scelte per l'aperto massimale Ω' richiesto nel testo. Ad esempio, è possibile porre $\Omega' = \Omega \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid |z| \geqslant 1\}$.omega' Essendo stellato rispetto all'origine, Ω' è contraibile, dunque semplicemente connesso, e perciò ω è esatta su Ω'. Ora, ogni $\Omega'' \supsetneq \Omega'$ deve contenere un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ con $|x_0| > 1$. La circonferenza di centro $x_0/2$ e raggio $|x_0|/2$ è interamente contenuta in Ω'', ed è bordo di una palla che contiene esattamente un polo di f (il polo 1 se $x_0 > 1$ o il polo -1 se $x_0 < -1$). L'integrale di ω lungo tale curva è perciò non nullo, e ω non può essere esatta su Ω''.