Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - III scritto - 17/9/2021

Esercizio 1. (a) [7 punti] Sia C la curva affine di equazione

$$(y-x)(y-2x)\dots(y-dx)-1=0$$

in $\mathbb{C}^2$. Si dimostri che C ha esattamente d asintoti distinti.

(b) [8 punti] Si mostri che una curva affine irriducibile D di grado d in $\mathbb{C}^2$ ha al più d asintoti distinti (attenzione: verrà valutata positivamente la dimostrazione di qualsiasi limitazione superiore - anche non ottimale - per il numero di asintoti di D).

Soluzione. (a): La chiusura proiettiva di C ha equazione

$$F(x_0,x_1,x_2)=(x_2-x_1)(x_2-2x_1)\dots(x_2-dx_1)-x_0^d$$

i cui punti all'infinito sono dati dai punti della forma $P_i=[0:1:i]$, $i=1,\dots,d$. La derivata parziale F_{x_2} di F rispetto a x_2 è data da

$$F_{x_2}(x_0,x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{d}(x_2-x_1)\dots\widehat{(x_2-ix_1)}\dots(x_2-dx_1)\ ,$$

per cui $F_{x_2}(0,1,i)=(i-1)\dots(i-(i-1))(i-(i+1))\dots(i-d)\neq 0$. Questo mostra che P_i è un punto liscio di $\overline{C}$, e che la tangente r_i a $\overline{C}$ in P_i ha equazione della forma $ax_0+bx_1+cx_2=0$, con $c\neq 0$. In particolare, r_i non è la retta all'infinito. Ne segue che tutti e soli gli asintoti di C sono le parti affini delle rette $r_1,\dots,r_d$.

(b): Sia $\overline{D}$ la chiusura proiettiva di D in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e sia $H_0\subseteq\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la retta all'infinito. Osserviamo che la retta H_0 non è una componente di $\overline{D}$ (questo è vero per qualsiasi curva che si ottenga come chiusura proiettiva di una curva affine), per cui, come mostrato a lezione, si ha

$$d=\deg\overline{D}=\sum_{P\in V(\overline{D})\cap H_0} I(\overline{D},H_0,P)\geqslant\sum_{P\in V(\overline{D})\cap H_0} m_{\overline{D}}(P)\ .$$

Dunque la somma delle molteplicità dei punti all'infinito di $\overline{D}$ è al più d. Per concludere, è ora sufficiente ricordare (si veda la lezione del 9 ottobre 2020) che, se P è un punto di $\overline{D}$ di molteplicità k, allora P ammette al più a k tangenti principali (alcune delle quali possono peraltro coincidere con H_0, e dunque non dare luogo ad asintoti). Dunque il numero massimo di asintoti di D è minore o uguale a $\sum_{P\in V(\overline{D})\cap H_0} m_{\overline{D}}(P)\leqslant d$.

Argomenti meno sofisticati possono essere utilizzati per trovare bound superiori meno accurati.

Esercizio 2. Per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, definiamo lo spazio topologico X_A come segue: X_A è il quoziente topologico di $\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ rispetto alla relazione $(x,t)\sim(y,t')$ se e solo se $(x,t)=(y,t')$ oppure $x=y\in A$.

(a) [5 punti] Sia $A=(0,1)$. Si dica se X_A sia T_2.
(b) [5 punti] Si mostri che, qualunque sia A, lo spazio X_A non è compatto.
(c) [5 punti] Si mostri che, qualunque sia A, ogni punto di X_A possiede un intorno compatto.

Soluzione. Sia $\pi_A\colon\mathbb{R}\times\{-1,1\}\to X_A$ la proiezione.

(a): Mostriamo che $[(0,1)]$ e $[(0,-1)]$ non hanno intorni disgiunti, per cui X_A non è T_2. Siano infatti U,V aperti di X_A che contengono $[(0,1)]$ e $[(0,-1)]$ rispettivamente. Allora $\pi_A^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ che contiene $(0,1)$. Esso contiene pertanto anche un insieme della forma $(-\varepsilon,\varepsilon)\times\{1\}$ per qualche $\varepsilon>0$. Analogamente, $\pi_A^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}\times\{-1,1\}$ che contiene $(-\varepsilon',\varepsilon')\times\{-1\}$ per qualche $\varepsilon'>0$. Ma allora $U\cap V\supseteq\pi_A((0,\varepsilon)\times\{1\})\cap\pi_A((0,\varepsilon')\times\{-1\})\neq\emptyset$, da cui la tesi.

(b): Per ogni $n\in\mathbb{N}$, sia $U_n=(-n,n)\times\{-1,1\}$. Allora U_n è un aperto saturo di $\mathbb{R}\times\{-1,1\}$, la cui proiezione $V_n=\pi_A(U_n)$ è perciò un aperto di X_A. È facile verificare che $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è allora un ricoprimento aperto di X_A che non ammette sottoricoprimenti finiti.

(c): Data la classe $[(x,\varepsilon)] \in X_A$, consideriamo $U = \pi_A([x-1,x+1]\times\{1,-1\})$, $n \in \mathbb{N}$. Poiché $[x-1,x+1]\times\{1,-1\}$ è compatto e π_A è continua, U è compatto. Inoltre, $[x-1,x+1]\times\{1,-1\}$ contiene l'aperto saturo $(x-1,x+1)\times\{1,-1\}$, la cui proiezione è pertanto un aperto che contiene $[(x,\varepsilon)]$ ed è contenuto in U. Dunque U è un intorno di $[(x,\varepsilon)]$, da cui la tesi.

Esercizio 3. Sia $p\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ la funzione $p(z) = e^z$.

(a) [5 punti] Si dimostri che ogni automorfismo olomorfo di $\mathbb{C}^*$ si solleva ad un omeomorfismo di $\mathbb{C}$ in sé (ovvero per ogni automorfismo olomorfo φ di $\mathbb{C}^*$ esiste un omeomorfismo $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\varphi \circ p = p \circ \widetilde{\varphi}$);

(b) [4 punti] Si dimostri che il sollevamento $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ottenuto al punto precedente è un automorfismo olomorfo di $\mathbb{C}$.

(c) [6 punti] Si dimostri che se φ è un automorfismo di $\mathbb{C}^*$ allora esiste $\lambda \neq 0$ tale che $\varphi(z) = \lambda\, z$ per ogni z o $\varphi(z) = \lambda\, z^{-1}$ per ogni z.

Soluzione. (a): Sia φ un automorfismo di $\mathbb{C}^*$ e sia $\varphi(1) = p(w_1)$. Per il teorema di sollevamento delle funzioni ad un rivestimento esiste un'unica funzione continua $\widetilde{\varphi} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sollevamento di φ tale che $\widetilde{\varphi}(0) = w_1$. Similmente esiste un'unica funzione continua $\widetilde{\psi}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sollevamento di φ^{-1} tale che $\widetilde{\psi}(w_1) = 0$. Osserviamo che $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$ e $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$ sono sollevamenti dell'identità che lasciano fisso rispettivamente 0 e w_1, e per unicità del sollevamento sono quindi l'identità. Quindi $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$ sono una l'inversa dell'altra.

(b): Dimostriamo che $\widetilde{\varphi}$ è olomorfa. Questa è una proprietà che possiamo verificare localmente. Sia $w_0 \in \mathbb{C}$ e sia $z_0 = e^{w_0}$. Sia U una palla di centro z_0 e raggio sufficientemente piccolo (basta minore di $|z_0|$) in modo che sia definito il logaritmo su U e sia $\ell : U \longrightarrow \mathbb{C}$ la determinazione del logaritmo con $\ell(z_0) = w_0$. Localmente abbiamo $\widetilde{\varphi} = \ell \circ \varphi \circ p$. Quindi $\widetilde{\varphi}$ è olomorfa in w_0 perchè composizione di funzioni olomorfe. (Analogamente, anche $\widetilde{\psi}$ è olomorfa, per cui $\widetilde{\varphi}$ è effettivamente un biolomorfismo).

(c): Dimostriamo che il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{C}^*$ è l'insieme delle trasformazioni $z \mapsto \lambda z^{\pm 1}$. Chiaramente questi sono automorfismi, dimostriamo che non ce ne sono altri. Sia φ un automorfismo di $\mathbb{C}^*$ e sia $\widetilde{\varphi}$ un suo sollevamento come nel punto precedente. Esistono quindi $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$ tali che $\widetilde{\varphi}(w) = aw + b$.

Osserviamo che da $\varphi \circ p = p \circ \widetilde{\varphi}$ otteniamo che

$$f(w) := \widetilde{\varphi}(w + 2\pi i) - \widetilde{\varphi}(w) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

per ogni $w \in \mathbb{C}$. Per continuità dobbiamo avere che $f(w)$ è costante. Ne ricaviamo che $a = n$ è un intero e quindi che $\varphi(e^w) = e^b e^{nw}$ ovvero $\varphi(z) = \lambda z^n$ con $\lambda = e^b$. Infine, poiché φ è iniettiva, ricaviamo $n = \pm 1$.