Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - III scritto - 17/9/2021

Esercizio 1. [12 punti] Sia α un numero reale, $\alpha > 1$. Provare che esiste esattamente un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| \leqslant 1$ e che valga la condizione

$$ze^{\alpha - z} = 1 \ . \tag{1}$$

(Suggerimento: si può fare uso del Teorema di Rouché).

Soluzione. Siano $f(z) = ze^{\alpha-z}$ e $g(z) = f(z) - 1$. Per prima cosa, osserviamo che f e g ammettono lo stesso numero di zeri per $|z| \leqslant 1$, grazie al teorema di Rouché. Infatti,

$$|g(z) - f(z)| = 1 \ , \tag{2}$$

e d'altro canto

$$|f(z)| = |e^{\alpha - \mathsf{Re}(z)}| > 1 \tag{3}$$

dato che $\alpha > 1$ e $|z| = 1$. Adesso, f ha un solo zero in $|z| \leqslant 1$, quindi anche g ha la stessa proprietà, e ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 2. Per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, definiamo lo spazio topologico X_A come segue: X_A è il quoziente topologico di $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ rispetto alla relazione $(x, t) \sim (y, t')$ se e solo se $(x, t) = (y, t')$ oppure $x = y \in A$.

(a) [5 punti] Sia $A = (0, 1)$. Si dica se X_A sia T_2.
(b) [5 punti] Si mostri che, qualunque sia A, lo spazio X_A non è compatto.
(c) [5 punti] Si mostri che, qualunque sia A, ogni punto di X_A possiede un intorno compatto.

Soluzione. Sia $\pi_A : \mathbb{R} \times \{-1, 1\} \to X_A$ la proiezione.

(a): Mostriamo che $[(0, 1)]$ e $[(0, -1)]$ non hanno intorni disgiunti, per cui X_A non è T_2. Siano infatti U, V aperti di X_A che contengono $[(0, 1)]$ e $[(0, -1)]$ rispettivamente. Allora $\pi_A^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ che contiene $(0, 1)$. Esso contiene pertanto anche un insieme della forma $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\}$ per qualche $\varepsilon > 0$. Analogamente, $\pi_A^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ che contiene $(-\varepsilon', \varepsilon') \times \{-1\}$ per qualche $\varepsilon' > 0$. Ma allora $U \cap V \supseteq \pi_A((0, \varepsilon) \times \{1\}) \cap \pi_A((0, \varepsilon') \times \{-1\}) \neq \emptyset$, da cui la tesi.

(b): Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $U_n = (-n, n) \times \{-1, 1\}$. Allora U_n è un aperto saturo di $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$, la cui proiezione $V_n = \pi_A(U_n)$ è perciò un aperto di X_A. È facile verificare che $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è allora un ricoprimento aperto di X_A che non ammette sottoricoprimenti finiti.

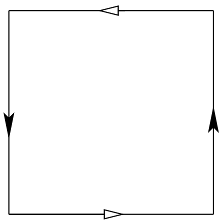
(c): Data la classe $[(x, \varepsilon)] \in X_A$, consideriamo $U = \pi_A([x - 1, x + 1] \times \{1, -1\})$, $n \in \mathbb{N}$. Poiché $[x - 1, x + 1] \times \{1, -1\}$ è compatto e π_A è continua, U è compatto. Inoltre, $[x - 1, x + 1] \times \{1, -1\}$ contiene l'aperto saturo $(x - 1, x + 1) \times \{1, -1\}$, la cui proiezione è pertanto un aperto che contiene $[(x, \varepsilon)]$ ed è contenuto in U. Dunque U è un intorno di $[(x, \varepsilon)]$, da cui la tesi.

Esercizio 3. Sia $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, dotato della usuale topologia euclidea, e siano $\sim_1$ e $\sim_2$ le più piccole relazioni di equivalenza su Q tali che:

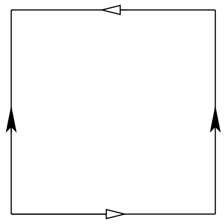
$$(x, 0) \sim_1 (1 - x, 1) \quad \forall 0 \leqslant x \leqslant 1 \, , \qquad (0, y) \sim_1 (1, 1 - y) \quad \forall 0 \leqslant y \leqslant 1 \, ,$$
$$(x, 0) \sim_2 (1 - x, 1) \quad \forall 0 \leqslant x \leqslant 1 \, , \qquad (0, y) \sim_2 (1, y) \quad \forall 0 \leqslant y \leqslant 1 \, .$$

Siano inoltre $X_1 = Q/_{\sim_1}$, $X_2 = Q/_{\sim_2}$, e $p_i : Q \to X_i$ le relative proiezioni al quoziente.

(1) [2 punti] Si descrivano $p_1(\partial Q)$ e $p_2(\partial Q)$.
(2) [7 punti] Si descriva una presentazione di $\pi_1(X_1)$ e di $\pi_1(X_2)$ tramite generatori e relazioni. (Suggerimento: si ricalchi il calcolo del gruppo fondamentale del toro e delle superfici condotto a lezione).
(3) [6 punti] Si dica se X_1 sia omotopicamente equivalente a X_2.



$\sim_1$



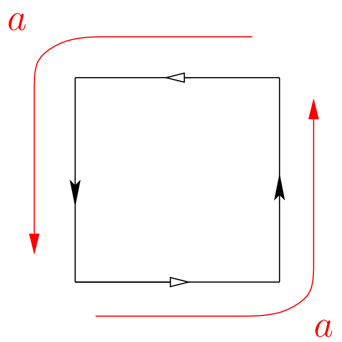
$\sim_2$

Soluzione. (a): È immediato verificare che $(0,0) \sim_1 (1,1)$ e $(1,0) \sim_1 (0,1)$, mentre $(0,0)$ non è $\sim_1$-equivalente a $(1,0)$. Dunque la proiezione dei vertici di Q consiste di due punti, e $p_1(\partial Q) = p_1(([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$ al quoziente dell'unione di due segmenti consecutivi rispetto all'identificazione del primo estremo del primo con il secondo estremo del secondo. Tale quoziente è sua volta omeomorfo al quoziente di un segmento del quale siano identificati gli estremi, e perciò ad S^1.

Invece, tutti i vertici di Q sono $\sim_2$-equivalenti, per cui la proiezione dei vertici di Q rispetto a p_2 consiste di un solo punto. Ne segue facilmente che $p_2(\partial Q)$è omeomorfo a $S^1 \vee S^1$.

(b): Per quanto visto in (a), $p_1(\partial Q)$ è omeomorfo a S^1. Ragionando come abbiamo fatto in aula per il calcolo del gruppo fondamentale delle superfici, otteniamo perciò che, detta a la classe determinata da una parametrizzazione di tale S^1, il gruppo fondamentale di X_1 è generato da a. Inoltre, per il Teorema di Van Kampen, la presenza di $p_1(\mathrm{int}(Q))$ impone la relazione a^2, per cui

$$\pi_1(X_1) = \langle a \,|\, a^2 \rangle \ .$$

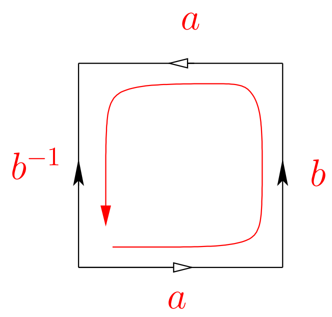


Poiché il gruppo libero generato da a è semplicemente $\mathbb{Z}$, che è abeliano, la chiusura normale di a^2 in tale gruppo coincide con il sottogruppo generato da a^2, che è $2\mathbb{Z}$. Dunque $\pi_1(X_1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (in particolare, è finito).

Invece, $p_2(\partial Q)$ è omeomorfo al bouquet di due copie di S^1. Ragionando come abbiamo fatto in aula per il calcolo del gruppo fondamentale delle superfici otteniamo che una presentazione di $\pi_1(X_2)$ è data da

$$\pi_1(X_2) = \langle a, b \,|\, abab^{-1} \rangle \ .$$

(c): X_1 e X_2 non sono omotopicamente equivalenti. Per dimostrarlo, poiché $\pi_1(X_1)$ è finito ed il gruppo fondamentale è un invariante omotopico, basta vedere che $\pi_1(X_2)$ è infinito. Sia F_2 il gruppo libero generato dai simboli a, b. Esiste un unico omomorfismo $\varphi \colon F_2 \to \mathbb{Z}$ tale che $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Si ha $\varphi(abab^{-1}) = 0$, per cui la chiusura normale di $abab^{-1}$ giace nel kernel di φ. Perciò φ induce per passaggio al quoziente un omomorfismo $\overline{\varphi} \colon \pi_1(X_2) \to \mathbb{Z}$ tale che $\overline{\varphi}([b]) = 1$. Avendo 1 nella sua immagine, tale omomorfismo è surgettivo, per cui $\pi_1(X_2)$ è infinito, come voluto.


a
b^{-1}
b
a