Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - IV scritto - 28/1/2022

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico, e sia $A \subset X$. Ricordiamo che un punto $x_0 \in X$ si dice *di accumulazione* per A se per ogni intorno U di x_0 in X l'insieme $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$ è non vuoto. Indichiamo con $D(A)$ l'insieme *derivato* di A, cioè l'insieme di tutti e soli i punti di accumulazione di A.

(1) Si mostri che, se X è T_1, l'insieme dei punti di accumulazione di A è chiuso.
(2) Sia ora $X = [-1, 1]$ con la topologia data dagli insiemi $X, \emptyset$, e $[-1, b), (a, b), (a, 1]$ con $a < 0 < b$ (si può dare per buono che questa sia effettivamente una topologia), e sia $A = \{0\}$). Si dica se $D(A)$ è chiuso in X.

Soluzione. (1): Vediamo che il complementare di $D(A)$ è aperto. Sia $y_0 \notin D(A)$. Allora esiste un intorno U di y_0 tale che $(U \setminus \{y_0\}) \cap A = \emptyset$. Per concludere, basta mostrare che $U \subseteq X \setminus D(A)$: così facendo, avremo mostrato che il complementare di $D(A)$ è intorno di ogni suo punto, ed è perciò aperto.

Sia allora $y \in U$. Poiché già sappiamo che $y_0 \notin D(A)$, possiamo assumere $y \neq y_0$. Notiamo che, poiché X è T_1, l'insieme $U' = U \setminus \{y_0\}$ è aperto, ed è pertanto un intorno di y. Sappiamo inoltre che $(U' \setminus \{y\}) \cap A \subseteq U' \cap A = \emptyset$, per cui in effetti y ammette un intorno U' disgiunto da A, e pertanto $y \notin D(A)$. Questo conclude la dimostrazione che $U \subseteq D(A)$.

(2): Notiamo innanzi tutto che $0 \notin D(A)$, in quanto per ogni intorno U di 0 si ha ovviamente $(U \setminus \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$. D'altro canto, se $x \in [-1, 1]$ è diverso da 0, allora ogni suo intorno U deve contenere un insieme della forma $[-1, b)$ con $b > 0$, oppure (a, b) con $a < 0 < b$, oppure $(a, 1]$ con $a < 0$, per cui $(U \setminus \{x\}) \cap \{0\} \neq \emptyset$. Dunque $D(A) = [-1, 1] \setminus \{0\}$, per cui il complementare di $D(A)$, essendo uguale a $\{0\}$, non è aperto, e perciò $D(A)$ non è chiuso.

Esercizio 2. Sia X il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$X = \{v \in \mathbb{R}^3 | \|v\| = 1\} \cup \{(0, 0, z) | z \in [-1, 1]\} .$$

(1) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
(2) Si dica se il rivestimento universale di X sia compatto.

Soluzione. (1): Applichiamo Van Kampen. Sia

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\} \cup \{(0, 0, z) | z \in [-1, -1/2) \cup (1/2, 1]\}.$$

Osserviamo che U è un aperto connesso per archi di X che si retrae per deformazione sulla sfera di centro l'origine e raggio 1, in particolare U è semplicemente connesso.

Sia inoltre Z l'unione del segmento $\{(0, 0, z) | z \in [-1, 1]\}$ e del meridiano: $\{(x, 0, z) \in S^3 : x \geqslant 0\}$. Allora Z è omeomorfo ad un cerchio e pertanto il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Sia

$$V = \{v \in X \mid \mathrm{dist}(v, Z) < \varepsilon\} .$$

Allora per ε sufficientemente piccolo V è un aperto che si retrae per deformazione su Z e in particolare il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Infine l'intersezione tra U e V si retrae per deformazione sull'insieme $\{(x, 0, z) \in S^3 : x \geqslant 0\}$, ovvero a mezzo cerchio. Quindi l'intersezione tra U e V è connessa e semplicemente connessa.

Applicando il teorema di Van Kampen al ricoprimento di X dato dagli aperti U e V otteniamo che $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

(2): Sia $x_0 \in X$ un punto qualsiasi. La preimmagine X_0 di x_0 tramite la mappa di rivestimento universale è chiusa (in quanto X è T_1) e ha topologia discreta (in quanto un rivestimento è un omeomorfismo locale). Se il rivestimento universale di X fosse compatto, allora anche X_0 sarebbe compatto, ed avendo topologia discreta dovrebbe perciò essere finito. Ma la cardinalità di X_0 è uguale alla cardinalità del gruppo fondamentale di X, che, per quanto visto al punto (1), è infinita. Dunque il rivestimento universale di X non è compatto.

Esercizio 3. Sia $R > 0$, sia $D_R \subseteq \mathbb{C}$ il rettangolo di vertici $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$, e sia γ_R una parametrizzazione in senso antiorario del bordo di D_R. Siano inoltre $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, e si consideri la funzione meromorfa su $\mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z} \ .$$

(1) Si determinino i poli di f contenuti in D_R, e se ne calcolino i relativi residui.
(2) Per ogni $R > 0$ si calcoli $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$.
(3) Si calcoli

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1 + e^t}\, dt \ .$$

Soluzione. (1): Il denominatore di f si annulla solo quando $e^z = -1$, cioè per $z = \pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. L'unico di tali punti che è contenuto in D_R è $z_0 = \pi i$. Si ha $f(z) = g(z)/h(z)$, con $h'(z) = e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Pertanto, il polo in z_0 è semplice e si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i} \ .$$

(2): Applicando il Teorema dei residui, dal punto (1) si deduce che

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_0) = -2\pi i e^{a\pi i} \ .$$

(3): Dividiamo il cammino γ_R in 4 sottocammini α, β, γ, δ così fatti: $\alpha, \gamma : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = t$, $\gamma(t) = 2\pi i - t$; $\beta, \delta \colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\beta(t) = R + 2\pi i t$, $\delta(t) = -R + 2\pi i(1 - t)$. Allora

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_\alpha f(z)\, dz + \int_\beta f(z)\, dz + \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\delta f(z)\, dz \ .$$

Posto

$$I_R = \int_\alpha f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1 + e^t}\, dt \ ,$$

si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{a(2\pi i - t)}}{1 + e^{2\pi i - t}}\, dt \ , = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi a i} e^{-t}}{1 + e^{2\pi i} e^{-t}}\, dt = -e^{2\pi a i} I_R \ .$$

Inoltre,

$$\left| \int_\beta f(z)\, dz \right| = \left| 2\pi i \int_0^1 \frac{e^{a(R + 2\pi i t)}}{1 + e^{R + 2\pi i t}}\, dt \right| \leqslant 2\pi \int_0^1 \frac{e^{aR}}{e^R - 1}\, dt = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R - 1} \ .$$

Poiché $0 < a < 1$, questa quantità tende a 0 quando R tende a $+\infty$. Analogamente si mostra che anche $\int_\delta f(z)\, dz$ tende a 0 quando R tende a $+\infty$. Pertanto, sfruttando il punto precedente,

$$-2\pi i e^{a\pi i} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = (1 - e^{2\pi a i}) \lim_{R\to+\infty} I_R$$

Dunque il limite richiesto vale

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{e^{2\pi a i} - 1} = 2\pi i \frac{1}{e^{\pi a i} - e^{-\pi a i}} = 2\pi i \frac{1}{2i \sin \pi a} = \frac{\pi}{\sin \pi a} \ .$$