Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - V scritto - 18/2/2022

Esercizio 1. Siano

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} .$$

Siano $f, g \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ funzioni olomorfe tali che $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$ per ogni $z \in C$.

(1) [4 punti] Si dimostri che $g(z) \neq 0$ e che $f(z)/g(z) \notin (-\infty, 0]$ per ogni $z \in C$.

(2) [5 punti] Si dimostri che esistono un aperto $V \subseteq U$ tale che $C \subseteq V$ ed una funzione olomorfa $h \colon V \to \mathbb{C}$ tali che

$$e^{h(z)} = \frac{f(z)}{g(z)} .$$

(3) [3 punti] Si mostri che

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$

per ogni $z \in V$.

(4) [3 punti] Si dimostri che il numero di zeri di f e di g nel disco aperto di centro $0 \in \mathbb{C}$ e raggio 1 (contati con molteplicità) è uguale.

Soluzione esercizio 1. 1) Se $g(z) = 0$ abbiamo $\|f(z) - g(z)\| = \|f(z)\| + \|g(z)\|$ contro le ipotesi.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, ricordiamo che se u e v sono due vettori di $\mathbb{R}^2$ vale la disuguaglianza

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

e che, inoltre, se si assume $v \neq 0$ in tale disuguaglianza vale l'uguaglianza se e solo se $u = \lambda v$ con λ reale non negativo. Se applichiamo questa osservazione a $u = f(z)$ e $v = -g(z)$ otteniamo la tesi.

2) Osserviamo che le condizioni $g(z) \neq 0$ e $f(z)/g(z) \notin (-\infty, 0]$ sono condizioni aperte, quindi se sono soddisfatte in C sono soddisfate in un intorno aperto V di C. Sappiamo inoltre che su $\mathbb{C} \smallsetminus (-\infty, 0]$ è definita una determinazione del logaritmo, per esempio quella che prende il valore 0 in 1 e che indichiamo con L. Quindi $h(z) = L(f(z)/g(z)) : V \longrightarrow \mathbb{C}$ è la funzione cercata.

3) Osserviamo che

$$h' \, \frac{f}{g} = h' \, e^h = \frac{d\, e^h}{dz} = \frac{f' \, g - f \, g'}{g^2}$$

da cui

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

4) Osserviamo che $h' \, dz = dh$ è una forma esatta quindi il suo integrale lungo una curva chiusa è zero. Ricordiamo inoltre che se ℓ è una funzione olomorfa, in particolare senza poli, definita in un intorno della palla chiusa di raggio 1 e che non si annulla su C abbiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ell'(z)}{\ell(z)} \, dz = \mathrm{Zeri}(f).$$

Otteniamo quindi dal punto 3) che

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C h'(z) \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g'(z)}{g(z)} \, dz = \mathrm{Zeri}(f) - \mathrm{Zeri}(g)$$

da cui $\mathrm{Zeri}(f) = \mathrm{Zeri}(g)$.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e sia X_n, $n \in \mathbb{N}$ una successione di aperti con $X_n \subset X_{n+1}$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$. Sia $p \in X_0$. Siano $i_n \colon X_n \longrightarrow X$ e $i_{n,m} : X_n \longrightarrow X_m$ per $n < m$ le mappe di inclusione. Si dimostri che:

(1) [4 punti] Per ogni $\gamma \in \pi_1(X,p)$ esiste n e $\delta \in \pi_1(X_n,P)$ tale che $\gamma = (i_n)_*(\delta)$.
(2) [4 punti] Siano $\gamma \in \pi_1(X_n,p)$ e $\delta \in \pi_1(X_m,p)$. Allora $(i_n)_*(\gamma) = (i_m)_*(\delta)$ se e solo se esiste $N > n,m$ tale che $(i_{n,N})_*(\gamma) = (i_{m,N})_*(\delta)$.
(3) [4 punti] Sia $n < m$ e siano $\gamma \in \pi_1(X_n,p)$ e $\delta \in \pi_1(X_m,p)$ tali che $(i_n)_*(\gamma) = (i_m)_*(\delta)$. È vero che allora $(i_{n,m})_*(\gamma) = \delta$?

Soluzione esercizio 2. a) Sia $I = [0,1]$ e sia $\gamma : I \longrightarrow X$ una curva in $\Omega_1(X,p)$. L'immagine di γ è compatta quindi esiste n tale che l'immagine di I è contenuta in Ω_n. La tesi segue facilmente.

b) Siano ora $\gamma : I \longrightarrow X_m$ e $\delta : I \longrightarrow X_n$ due cammini con punto iniziale e finale uguale a p. Se $(i_n)_*([\gamma]) = (i_m)_*([\delta])$, allora esiste un'omotopia di cammini $H : I \times I \longrightarrow X$ tra γ e δ. Per compattezza di $I \times I$, esiste N, che possiamo assume maggiore di m ed n, tale che l'immagine di H è contenuta in X_N. Quindi γ e δ sono omotopi come cammini a valori in X_N.

c) Sia $X = \mathbb{C}$ e siano $X_0 = X_1 = \mathbb{C}^*$ e $X_i = \mathbb{C}$ per $i > 1$. Sia $p = 1$. Prendiamo $n = 0, m = 1$ e scegliamo i cammini

$$\gamma(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad \delta(t) = e^{2\pi i t}$$

per ogni $t \in I$. Sappiamo che questi due cammini non sono omotopi in X_1 (si noti che $i_{0,1}$ è l'identità di $\mathbb{C}^*$) ma lo sono in $X_2 = X$.

Esercizio 3. Siano $r = \{x_0 = 0\}$, $s = \{x_1 + x_2 = 0\}$ due rette proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia $a \in \mathbb{R}$, e si consideri la formula

$$f([0,x_1,x_2]) = [x_1 + ax_2, -x_1, x_1] .$$

(1) [5 punti] Per quali valori di a la formula descritta definisce una trasformazione proiettiva $f : r \to s$?
(2) [4 punti] Per quali valori di a la formula descritta definisce una prospettività $f : r \to s$?
(3) [6 punti] Per il valore di a trovato al punto (2), si determini il centro della prospettività corrispondente.

Soluzione esercizio 3. (1): Siano $H, K \subseteq \mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali tali che $r = \mathbb{P}(H)$, $s = \mathbb{P}(K)$, e sia $\widetilde{f} : H \to \mathbb{R}^3$ definita da $\widetilde{f}(0,x_1,x_2) = (x_1 + ax_2, -x_1, x_1)$. È evidente che $\widetilde{f}$ è lineare, e che $\widetilde{f}(H) \subseteq K$. Affinché $\widetilde{f}$ induca una trasformazione proiettiva da r in s è allora necessario e sufficiente che $\widetilde{f}$ sia iniettiva, cioè (rappresentando $\widetilde{f}$ rispetto alla base $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ di H e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Ciò avviene se e solo se $a \neq 0$, e dunque la formula data nel testo definisce una proiettività da r in s se e solo se $a \neq 0$.

(2): Poiché ogni prospettività è una trasformazione proiettiva, per il punto precedente deve essere $a \neq 0$. Sia ora $A = r \cap s$. Un facile calcolo mostra che $A = [0,1,-1]$. Come visto a lezione, per $a \neq 0$ la trasformazione proiettiva f è una prospettività se e solo se $f(A) = A$, cioè

$$[0,1,-1] = f([0,1,-1)] = [1-a,-1,1] ,$$

ovvero se e solo se $a = 1$.

(3): Ricapitolando, quando f è una prospettività si ha $f([0,x_1,x_2]) = [x_1+x_2, -x_1, x_1]$. Poiché, per ogni $P \in r$, il centro O di f è allineato con P ed $f(P)$, per determinare O basta scegliere due punti $P_1, P_2 \in r$ e porre

$$O = L(P_1, f(P_1)) \cap L(P_2, f(P_2)) .$$

Posto $P_1 = [0,1,0]$ si ha $f(P_1) = [1,-1,1]$, per cui $L(P_1, f(P_1)) = \{x_0 = x_2\}$. Per $P_2 = [0,0,1]$ si ha $f(P_2) = [1,0,0]$, per cui $L(P_2, f(P_2)) = \{x_1 = 0\}$. Dunque

$$O = \{x_0 = x_2\} \cap \{x_1 = 0\} = [1,0,1] \ .$$