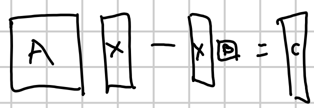
Equazioni di Sylvester:

$$AX - XB = C$$

$X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $\quad A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ $\quad B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\quad C \in \mathbb{C}^{m\times n}$



mn equazioni in mn incognite

<u>Vettorizzazione</u> e <u>prodotti di Kronecker</u>

Data

$$X \in \mathbb{C}^{m\times n} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_{11} & x_{12} & -- & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array}\right]$$

la <u>vettorizzazione</u> è

$$\operatorname{vec} X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \hline x_{12} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{m2} \\ \hline \vdots \\ \hline x_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}$$

$$(X_{ij}) = (\operatorname{vec} X)_{i+m(j-1)}$$

(Ordine Matlab/Fortran)

Usiamo la vettorizzazione per trovare la matrice associata alla mappa $X \mapsto AXB$ nelle basi date dalla vettorizzazione, cioè

$$\mathrm{vec}(AXB) = \boxed{M} \cdot \mathrm{vec}\, X$$

vogliamo trovarla

$X \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$AXB \in \mathbb{C}^{p\times q}$

$A \in \mathbb{C}^{p\times m}$

$B \in \mathbb{C}^{n\times q}$

$$(AXB)_{hl} = \sum_{i,j} A_{hi} X_{ij} B_{jl}$$

riga $h+p(l-1)$ della matrice

$$\left(\begin{array}{c}\text{entrata } h,l\\ \text{di } AXB\end{array}\right) \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c} A_{h1}B_{1l} & A_{h2}B_{1l} & \cdots & A_{hm}B_{1l} & A_{h1}B_{2l} & A_{h2}B_{2l} & \cdots & A_{hm}B_{2l} & \cdots & A_{hm}B_{nl}\end{array}\right] \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{m1} \\ \hline X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{m2} \\ \hline \vdots \\ X_{1n} \\ \vdots \\ X_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(\text{riga } h \text{ di } A)\cdot B_{1l} \quad (\text{riga } h \text{ di } A)_{2l} \quad \cdots \quad (\text{riga } h \text{ di } A)\, B_{nl}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{11}\cdot A & B_{21}\cdot A & \cdots & B_{n1} A \\ \hline B_{12} A & B_{22} A & \cdots & B_{n2} A \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1q} A & \cdots & \cdots & B_{nq} A \end{array}\right]$$

→ ogni blocco è multiplo di A con entrate determinate da B^T

Def: questo è il prodotto di Kronecker tra B^T e A, $B^T \otimes A$

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11}Y & x_{12}Y & \cdots & x_{1n}Y \\ x_{21}Y & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1}Y & & \cdots & x_{mn}Y \end{bmatrix}$$

(m,p)

$m \times n \quad p \times q \rightarrow mp \overset{(n,q)}{\times} nq$

Proprietà:

- $(A+B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$
- $\mathrm{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(X)$

⚠ c'è un T e non un $*$ anche con matrici complesse

- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$ quando A, B, C, D hanno dimensioni per cui ha senso fare AC e BD

Dim: basta provare che per ogni $x = \mathrm{vec}\, X$ si ha

$$(A \otimes B)\underbrace{(C \otimes D)\,\mathrm{vec}\, X}_{DXC^T} = \underbrace{(AC \otimes BD)\,\mathrm{vec}\, X}_{\mathrm{vec}\; BDX(AC)^T}$$

$$\mathrm{vec} \quad B\,(DXC^T)\,A^T \overset{\text{"}}{}$$

- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
- ortogonale $\otimes$ ortogonale $=$ ortogonale

Dim: $\underset{m \times m}{(Q_1} \otimes \underset{n \times n}{Q_2)} \cdot (Q_1^T \otimes Q_2^T) = Q_1Q_1^T \otimes Q_2Q_2^T = I_m \otimes I_n = I_{mn}$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \vdots & & I & \vdots \\ & & & I \\ 0 & \cdots & & I \end{bmatrix}$$

- diagonale $\otimes$ diagonale = diagonale
- triang. sup. $\otimes$ triang. sup = triang. sup.
- Molte decomposizioni "passano ai fattori".

Ad es.

svd$(A \otimes B)$: $\quad A \otimes B = U_1 S_1 V_1^T \otimes U_2 S_2 V_2^T$

$A = U_1 S_1 V_1^T$

$B = \underset{\text{orth.}}{U_2} \underset{\text{diag}}{S_2} \underset{\text{orth.}}{V_2^T}$

$$= \underset{\text{ortog.}}{(U_1 \otimes U_2)} \underset{\text{diag.}}{(S_1 \otimes S_2)} \underset{\text{ortog.}}{(V_1^T \otimes V_2^T)}$$

$S_1 \otimes S_2$ non ha gli elementi in ordine decrescente, ma basta riordinare

- $\|A \otimes B\|$ = val. sing. più grande = $\|A\| \cdot \|B\|$

Teorema: L'equazione di Sylvester $AX - XB = C$ ha una e una sola soluzione X se e solo se $\Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \emptyset$.

($\Lambda(A)$ = spettro di A (insieme degli autovalori))

Dim: Usiamo i prodotti di Kronecker per scrivere gli addendi dell'equazione: $\quad X \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$\text{vec}(AX) = \text{vec}(AX \cdot I_n) = (I_n \otimes A)\,\text{vec}\,X$$
$$\text{vec}(XB) = \text{vec}(I_m X \cdot B) = (B^T \otimes I_m)\,\text{vec}\,X$$
$$\text{vec}(C) = \text{vec}(C)$$

$$AX - XB = C \iff (I_n \otimes A - B^T \otimes I_m)\,\text{vec}\,X = \text{vec}\,C$$

Prendiamo decomposizioni di Schur:

$$A = \underset{\text{ort.}}{Q_A} \, \underset{\text{triang. sup.}}{U_A} \, Q_A^* \qquad B^T = \underset{\text{ort.}}{Q_B} \, \underset{\text{tr. sup}}{U_B} \, Q_B^*$$

$$I \otimes A - B^T \otimes I = Q_B Q_B^* \otimes Q_A U_A Q_A^* - Q_B U_B Q_B^* \otimes Q_A Q_A^*$$

$$= \underset{\text{ortog.}}{(Q_B \otimes Q_A)} \, \underset{\text{triang. sup.}}{(I \otimes U_A - U_B \otimes I)} \, \underset{\text{trasposta di } Q_B \otimes Q_A}{(Q_B^* \otimes Q_A^*)}$$

Gli autovalori di $I \otimes A - B^T \otimes I$ si possono leggere dalla diagonale di questa decomposizione:

$$\begin{bmatrix} U_A & & & & \\ & U_A & & 0 & \\ & & U_A & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & U_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (U_B)_{11} I & (U_B)_{12} I & \cdots & (U_B)_{1n} I \\ & (U_B)_{22} I & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & (U_B)_{nn} I \end{bmatrix}$$

Se $\operatorname{diag}(U_A) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m) = \Lambda(A)$

$\operatorname{diag}(U_B) = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n) = \Lambda(B^T) = \Lambda(B)$ ho

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu_1 & & & & & & & & & \\ & \lambda_2 - \mu_1 & & & & & \times & & & \\ & & \ddots \; \lambda_m - \mu_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 - \mu_2 & & & & & & \\ & & & & \lambda_2 - \mu_2 & & & & & \\ & & & & & \ddots \; \lambda_m - \mu_2 & & & & \\ & & & & & & \cdots & & & \\ & & & & & & & \lambda_1 - \mu_n & \cdots & \lambda_m - \mu_n \end{bmatrix}$$

Cioè, gli autovalori di $I \otimes A - B^T \otimes I$ sono

$$\left(\lambda_i - \mu_j \;:\; \lambda_i \in \Lambda(A),\ \mu_j \in \Lambda(B) \right)$$

In particolare, $I \otimes A - B^T \otimes I$ è singolare se e solo se $\Lambda(A) \cap \Lambda(B) \neq \emptyset$.

L'equazione di Sylvester $AX - XB = C \iff (I \otimes A - B^T \otimes I) \operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$

ha soluzione unica se e solo se $\Lambda(A) - \Lambda(B) = \emptyset$.

Se risolvessimo direttamente il sistema $(I \otimes A - B^T \otimes I) \operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$, il costo sarebbe $O(m^3 n^3)$ operazioni.

<u>Idea</u>: uso la decomposizione di Schur calcolata sopra

$$I \otimes A - B^T \otimes I = (Q_B \otimes Q_A)(I \otimes U_A - U_B \otimes I)(Q_B \otimes Q_A)^*$$

$$\operatorname{vec} X = (I \otimes A - B^T \otimes I)^{-1} \operatorname{vec} C = (Q_B \otimes Q_A)(I \otimes U_A - U_B \otimes I)^{-1} (Q_B^* \otimes Q_A^*) \operatorname{vec} C$$

1. calcolo $(Q_B^* \otimes Q_A^*) \operatorname{vec} C = \operatorname{vec}\left(\underline{Q_A^* C (Q_B^*)^T}\right) = e$
2. risolvo $\underline{(I \otimes U_A - U_B \otimes I) f = e}$
3. $\operatorname{vec} C = \operatorname{vec}(Q_B \otimes Q_A) f = \operatorname{vec}\left(\underline{Q_A F Q_B^T}\right)$ (F t.c. $\operatorname{vec} F = f$)

$n \times n \quad m \times n \quad n \times n$

$O(m^2 n + m n^2)$

1 e 3 si fanno con costo $O(\max(m,n)^3)$

2 è un sistema triangolare $mn \times mn$, in realtà se uno conta gli elem. non-zero in ogni riga ce la fa con costo

$$O\left(\max(m,n)^3\right)$$

In realtà, lo vediamo formulato in modo alternativo

Algoritmo di Bartels-Stewart

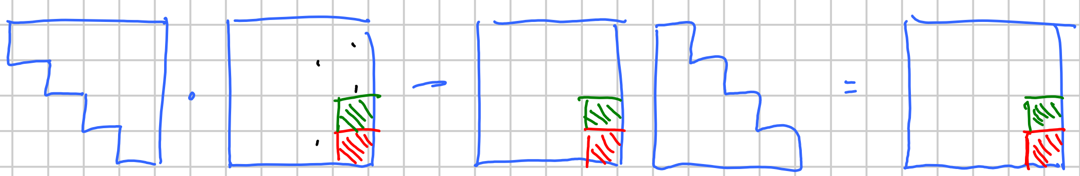
① Calcolo dec. di Schur $A = Q_A U_A Q_A^*$ $\quad B^T = Q_B U_B Q_B^*$

$$B = \overline{Q_B} L_B Q_B^T$$

$$(L_B = U_B^T)$$

② $AX - XB = C \to \cancel{Q_A^*} \cancel{Q_A} U_A \underbrace{Q_A^* X \overline{Q_B}}_{Y} - \underbrace{Q_A^* X \overline{Q_B}}_{Y} L_B \cancel{Q_B^T} \cancel{\overline{Q_B}} = \underbrace{Q_A^* C \overline{Q_B}}_{E}$

$$U_A Y - Y L_B = E$$



Equazione di posto (m,n):

$$U_{mm} Y_{mn} - Y_{mn} L_{nn} = E_{mn} \to \quad Y_{mn} = \frac{E_{mn}}{(U_{mm} - L_{nn})}$$

Equazione di posto $(m-1,n)$

$$U_{m-1,m-1} Y_{m-1,n} + U_{m-1,m} Y_{mn} - Y_{m-1,n} L_{nn} = E_{m-1,n}$$

$$Y_{m-1,n} = \frac{E_{m-1,n} - U_{m-1,m} Y_{mn}}{U_{m-1,m-1} - L_{n,n}}$$

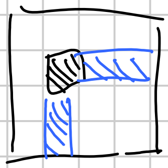
Equazione di posto i,j:

$$\boxed{U_{ii} Y_{ij}} + \underbrace{U_{i,i+1} Y_{i+1,j} + \dots + U_{im} Y_{mj}} - \left(\boxed{Y_{ij} L_{jj}} + \underbrace{Y_{i,j+1} L_{j+1,j} + \dots + Y_{in} L_{nj}}\right) = E_{ij}$$

$$\sum_{k>i} U_{ik} Y_{kj}$$

$$Y_{ij} = \frac{E_{ij} - U_{i,i+1} Y_{i+1,j} - \dots - U_{im} Y_{mj} + Y_{i,j+1} L_{j+1,j} + \dots + Y_{in} L_{nj}}{U_{ii} - L_{jj}} \qquad (*)$$

Gli elementi al numeratore stanno tutti sotto o a destra di Y_{ij}



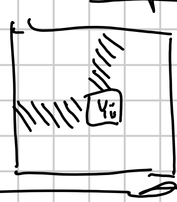
Posso risolvere in qualunque ordine richiede solo di aver già calcolato gli elementi sotto e a dx, ad es.

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 15 & 11 & 7 & 3 \\ 14 & 10 & 6 & 2 \\ 13 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 15 & 13 & 10 \\ 14 & 12 & 9 & 6 \\ 11 & 8 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolati gli elementi di $Y = Q_A^* X \overline{Q_B}$, basta fare due prodotti per avere $X = Q_A Y Q_B^T$

Implementazione Matlab:

Idea: riuso gli elementi di E per calcolare i numeratori delle formule $(*)$. Appena calcolo un Y_{ij}, lo uso per sottrarre gli addendi corrispondenti negli elementi sopra e a sinistra.



Generalizzazioni:

- forma di Schur reale $\to$ equazioni di Sylvester 1×1, 1×2, 2×1, 2×2 nei blocchi

- Con le stesse idee risolvo anche equazioni del tipo

$$AXB + CXD = E$$

partendo da <u>decomposizione QZ</u> della coppia A, C, cioè trovare Q, Z ortogonali t.c.

$$QAZ, \quad QCZ \text{ sono triang. superiori}$$

- Invece, <u>non</u> sono noti algoritmi per equazioni con <u>tre</u> termini

$$AXB + CXD + EXF = G.$$