Note Title 2023-03-07

Calcolo di un sottosp. invariante attraverso la forma di Schur

$$M = QUQ^*$$

Se $U_{11}, U_{22}, \dots U_{kk}$ sono gli autovalori di interesse, $Q_1 = Q\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$ è una base del sottosp. inv. associato.

Altrimenti, <u>riordinamento della forma di Schur</u>:

<u>Teo</u>: data $M = \begin{bmatrix} A & -C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ triangolare superiore, prendo

X che risolve $AX - XB = C$ (se $\Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \phi$)

e definisco $Q = qr\left(\begin{bmatrix} X & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\right)$, allora

$Q^* M Q = \begin{bmatrix} \hat{B} & -\hat{C} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}$ è triangolare superiore, con $\Lambda(B) = \Lambda(\hat{B})$
$\Lambda(A) = \Lambda(\hat{A})$

<u>Oss</u>: $AX - XB = C$ ha i due coeff. A, B triang. sup. Possiamo risolverla solo con il passo di sostituzione di Bartels-Stewart con un opportuno ordine degli elementi di X.

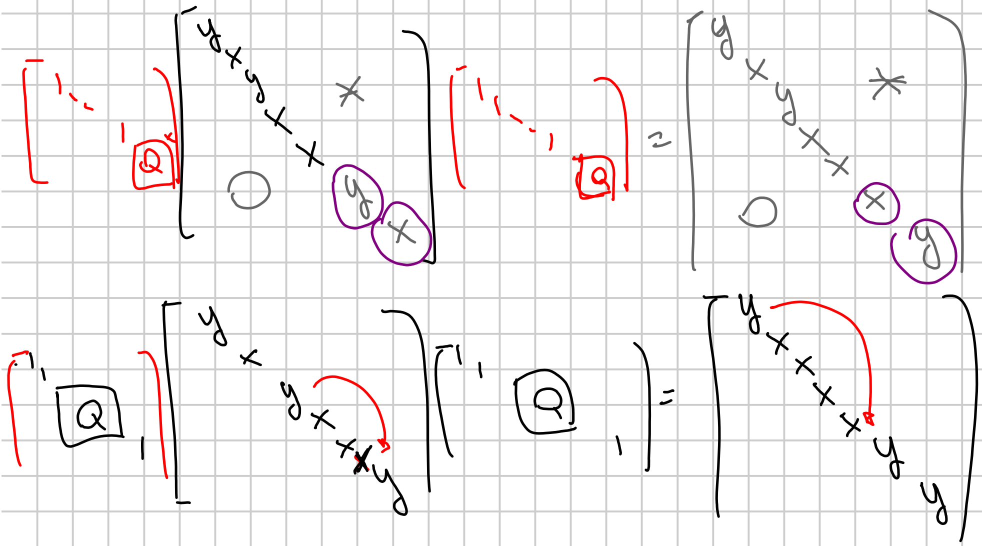
(<u>Es</u>: quale ordine?)

Posso applicare questo metodo a blocchi. Ad es.

$$U = \begin{bmatrix} y & & & & * \\ & x & & & \\ & & y & & \\ & & & x & \\ & & & & x \\ & 0 & & & y \\ & & & & x \end{bmatrix}$$

Per portare le x in alto a sx

Posso fare questi scambi:



Matlab: ordschur

```
>> M = randn(7,7);
>> [Q, U] = schur(M, 'complex');
>> [Q1, U1] = ordschur(Q, U, 'rhp');
>>
```

Teorema: Dati $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ e una perturbazione $\Delta_M = \begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_C \\ \Delta_D & \Delta_B \end{bmatrix}$

Considero perturbazioni del sott. inv. $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ di M.

Definiamo $a = \|\Delta_A\|_F$ $b = \|\Delta_B\|_F$, $c = \|\Delta_C\|_F$, $d = \|\Delta_D\|_F$

Se $\left(\operatorname{sep}(A,B) - a - b\right)^2 - 4d\left(\|C\|_F + c\right) \geq 0$, e $\operatorname{sep}(A,B) - a - b > 0$

allora esiste (unica) X con

$$\|X\|_F \leq \frac{2d}{\operatorname{sep}(A,B) - a - b}$$

tale che

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{sep}(A,B) = \sigma_{\min}\left(I \otimes A - B^T \otimes I\right) \\ &\leq \min_{\substack{\lambda \in \Lambda(A) \\ \mu \in \Lambda(B)}} |\lambda - \mu| \end{aligned}}$$

$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è base di un sott. inv. di $M + \Delta_M$

(Caso $a, b, c, d \to 0$! $M + \Delta_M$ ha un sott. inv. molto vicino a $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$.

Una perturbazione di norma $\|\Delta_M\|_F$ piccola produce una perturbazione di norma

$$\|X\|_F \leqslant \frac{2\|\Delta_M\|}{\operatorname{sep}(A,B)} + O\left(\|\Delta_M\|^2\right)$$

Quindi $\frac{2}{\operatorname{sep}(A,B)}$ è una sorta di costante di Lipschitz/ numero di condizionamento dei sottosp. invarianti.

Costruisco una trasformazione con una matrice incognita X che riporta $M+\Delta_M$ in forma triangolare:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+\Delta_A & C+\Delta_C \\ \Delta_D & B+\Delta_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+\Delta_A & C+\Delta_C \\ \Delta_D - XA - X\Delta_A & B+\Delta_B - X(C+\Delta_C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A+\Delta_A + (C+\Delta_C)X & C+\Delta_C \\ \boxed{\Delta_D - X(A+\Delta_A) + (B+\Delta_B)X - X(C+\Delta_C)X} & B+\Delta_B - X(C+\Delta_C) \end{bmatrix}$$

Per avere 0 nel blocco $(2,1)$, X deve risolvere

$$\Delta_D - X(A+\Delta_A) + (B+\Delta_B)X - X(C+\Delta_C)X = 0$$

"Equazione di Riccati algebrica"

$$\underbrace{X(A+\Delta_A) - (B+\Delta_B)X}_{} = \Delta_D - X(C+\Delta_C)X$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\left[(A+\Delta_A)^T \otimes I - I \otimes (B+\Delta_B)\right]}_{\hat{T}} \operatorname{vec} X = \operatorname{vec}\left[\Delta_D - X(C+\Delta_C)X\right]$$

$$\operatorname{vec}(X) = \hat{T}^{-1} \operatorname{vec}\left[\Delta_D - X(C+\Delta_C)X\right] \leftarrow \operatorname{vec}(X) = \varphi(\operatorname{vec}(X))$$

$\hat{T}$ perturbazione di $T = A^T \otimes I - I \otimes B \quad \sigma_{\min}(T) = \operatorname{sep}(A,B)$

(Risultati di perturb. valori singolari : $|\sigma_k(M+E)-\sigma_k(M)| \leq \|E\|$)

$$\sigma_{min}(\hat{T}) \geq \sigma_{min}(T) - a - b = sep(A,B) - a - b$$

$$\|\hat{T}^{-1}\| \leq \frac{1}{sep(A,B)-a-b}$$

Vogliamo mostrare che esiste $r>0$ tale che $\varphi(B(0,r)) \subseteq B(0,r)$

Visto che φ è continua, questo implica che ha un punto fisso X_* con $\|X_*\|_F \leq r$

$$\|X\|_F \leq r \Rightarrow \|\Delta_D - X(C+\Delta_C)X\|_F \leq \|\Delta_D\|_F + \|X\|_F(\|C\|_F + \|\Delta_C\|_F)\|X\|_F$$

$$\leq d + r^2(\|C\|_F + c)$$

$$\|\varphi(X)\| \leq \|\hat{T}\|^{-1}(d + r^2(\|C\|_F + c))$$

Se trovo $r>0$ tale che $\boxed{r = \|\hat{T}\|^{-1}(d + r^2(\|C\|_F + c))}$ (*), allora ho che $\|vec(X)\| \leq r \Rightarrow \|\varphi(vec(X))\| \leq r$ e quindi φ manda una palla $B(0,r)$ in sé stessa.

La (*) è un'equazione di secondo grado in r

$$r = \frac{1}{sep(A,B)-a-b}(d + r^2(\|C\|_F + c))$$

$$\alpha := d \qquad \gamma := \|C\|_F + c \qquad \beta := sep(A,B) - a - b$$

$$\beta r = \alpha + \gamma r^2$$

Passiamo all'equazione $\beta s = \alpha s^2 + \gamma s$ che ha come soluzioni

$$\frac{1}{r_\pm} = s_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Se $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, esiste una soluzione $S_+ \geq \frac{\beta}{2\alpha}$

e quindi $r_+ \leq \frac{2\alpha}{\beta}$.

Quindi $\varphi\left(B(0, r_+)\right) \subseteq B(0, r_+)$

$\Rightarrow$ esiste una soluzione dell'eq. matriciale con $\|X\|_F \leq r_+$

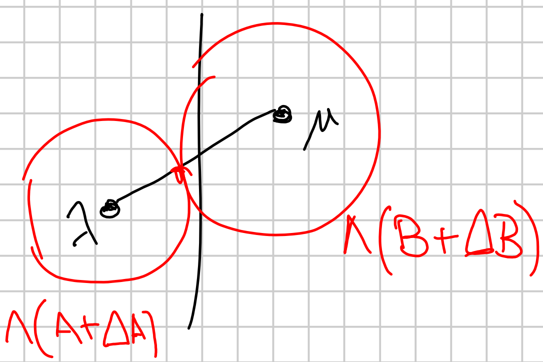
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix} (M + \Delta_M) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (M + \Delta_M) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (M + \Delta_M) \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} \boxed{*}$$

Caso normale:

$\operatorname{sep}(A,B) = \min |\lambda - \mu|$



Funzioni di matrici

Riusciamo a prendere una funzione scalare $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e estenderla a matrici quadrate?

ex: $\exp(x) \to \boxed{\exp(A)}$

$\sin(x) \to ?$

$\log(x) \to ?$

$\operatorname{sign}(x) \to ?$

Partiamo da polinomi: $p(x) = 1 - 3x + 5x^2 \to p(A) = I - 3A + 5A^2$

Guardiamo cosa succede ai singoli blocchi di Jordan

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k} \qquad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d + 0 \cdot x^{d+1} + \dots$$

$$p(J_0) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ & & & \ddots & a_1 \\ & & & & a_0 \end{bmatrix}$$

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \qquad p(x) = \boxed{p(\lambda)} + \boxed{p'(\lambda)}(x-\lambda) + \boxed{\frac{p''(\lambda)}{2}}(x-\lambda)^2 + \dots$$

$$\dots + \boxed{\frac{p^{(d)}(\lambda)}{d!}}(x-\lambda)^d$$

$$p(J_\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{p^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{p''(\lambda)}{2} \\ & & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$p(A) = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i =$$

$$p(A) = p\left(V \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{bmatrix}}_{J} V^{-1}\right) = \sum_{i=0}^{d} a_i \left(V J V^{-1}\right)^i = V \left(\sum_{i=0}^{d} a_i J^i\right) V^{-1}$$

$= VDV^{-1}$ dove D è la matrice diag. a blocchi con

blocchi: $$p(J_i) = \begin{bmatrix} p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & \cdots & \frac{p^{(k-1)}(\lambda_i)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & p'(\lambda_i) \\ & & & p(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Questo suggerisce una definizione: data $f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definisco a partire da $A = VJV^{-1}$ $\quad J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$

$f(A) := VDV^{-1}$ dove D ha blocchi diag.

$$f(J_i) := \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''}{2}(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(k_i-1)}}{(k_i-1)!}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

(Diciamo che f "è definita su A" se per ogni blocco di Jordan $J_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ f è definita in λ_i e derivabile $k_i - 1$ volte..

Problema: è ben definita, o dipende da V che non è unica?

Soluzione: possiamo dare una definizione alternativa in questo modo: se abbiamo un polinomio $p(x)$ che soddisfa

$$\begin{aligned} f(\lambda_i) &= p(\lambda_i) \\ f'(\lambda_i) &= p'(\lambda_i) \\ &\vdots \\ f^{(k_i-1)}(\lambda_i) &= p^{(k_i-1)}(\lambda_i) \end{aligned}$$

per ogni blocco $J_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ nella forma di Jordan

allora definiamo $f(A) := p(A)$

- non dipende da V, perché $p(A) = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i$ non coinvolge V
- condizioni non sono mai in conflitto su blocchi diversi
- non dipende dalla scelta di p tra i vari polinomi che soddisfano queste condizioni: difatti abbiamo visto che $p(A)$ dipende solo dalle quantità $p(\lambda_i), p'(\lambda_i), \ldots p^{(k_i-1)}(\lambda_i)$

(a patto che ne esista almeno uno!) interpolazione di Hermite

$$\mathrm{Ker}\ A - \lambda_i I \subsetneq \mathrm{Ker}\ (A - \lambda_i I)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i I)^{k_i - 1}$$