Note Title 2023-03-09

$f: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \longrightarrow f(A) \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$p(A) = V \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_k) \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$p\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''}{2}(\lambda) & \dots & \frac{p^{(k-1)}}{(k-1)!}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

per un polinomio p, e possiamo prenderla come definizione anche per una funzione generica f.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(4) = 2 \\ f'(4) = \frac{1}{4} \\ f''(4) = -\frac{1}{32} \end{array}$$

$$f(A) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{64} & 0 \\ & 2 & \frac{1}{4} & 0 \\ & & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Alternativamente: prendo $p(x)$ polinomio che soddisfi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 3\cdot 4^2 & 2\cdot 4 & 1 & 0 \\ 6\cdot 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{32} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} p(0) = 0 \\ p(4) = 2 \\ p'(4) = \frac{1}{4} \\ p''(4) = -\frac{1}{32} \end{cases}$$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$p(x)=\frac{3}{256}x^3-\frac{5}{32}x^2+\frac{15}{16}x \qquad \begin{bmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3/256\\ -5/32\\ 15/16\\ 0\end{bmatrix}$$

$$p(A)=f(A)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{64} & \\ & 2 & \frac{1}{4} & \\ & & 2 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right] \qquad [f(A)]^2=A$$

"Non-esempio":

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad f(x)=\sqrt{x} \qquad \begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0) \text{ non esiste!}\end{array}$$

Non posso definire $f(A)$

Lemma: non esiste una matrice $B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ tale che $B^2=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Dim: se B ha autovalori λ_1, λ_2, B^2 ha autovalori λ_1^2, λ_2^2.
Allora, se esistesse B t.c. $B^2=A$ dovrei avere $\Lambda(B)=\{0\}$
Allora B ha forma di Jordan

$$B=V\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{-1} \quad \text{oppure} \quad B=V\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{-1}=0$$

$\to B^2=V\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cancel{V^{-1}V}\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{-1}=V\cdot 0\cdot V^{-1}$, impossibile

$\to B^2=0$, impossibile

ES: $f(x)=\exp(x)$

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} f(-1)=e^{-1}\\ f(0)=1\\ f(1)=e\\ f'(1)=e\end{array}$$

$$\exp(A)=\begin{bmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e & e\\ 0 & 0 & 0 & e\end{bmatrix}=I+A+\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{6}A^3+\dots$$

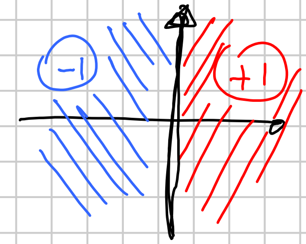
$$=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 1\\ & & & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 2\\ & & & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 3\\ & & & 1\end{bmatrix}+\dots$$

sulla diagonale, ho delle serie scalari per l'esponenziale
per l'elemento (3,4), è più complicato, lo vedremo nel seguito.

ES:

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \operatorname{Re}(x) > 0 \\ -1 & \operatorname{Re}(x) < 0 \end{cases}$$

(non definito per $\operatorname{Re}(x) = 0$)



$$A = V \begin{bmatrix} \boxed{-3} & & & \\ & \boxed{-2} & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} V^{-1} \quad \text{per } V \in \mathbb{C}^{4\times 4} \text{ invertibile}$$

$$\operatorname{sign}(A) = V \begin{bmatrix} \boxed{-1} & & & \\ & \boxed{-1} & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} V^{-1}$$

← non è né $+I$ né $-I$!
È una matrice che ha le stesse catene di Jordan di A, e gli autovalori sono rimpiazzati da ± 1 e i blocchi di Jordan sono rimpiazzati da $\pm I$

Oss:

$$\operatorname{sign}(A) - I = V \begin{bmatrix} -2 & & & \\ & -2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} V^{-1} \qquad \operatorname{Ker}(\operatorname{sign}(A) - I) = \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$$

$$\operatorname{sign}(A) + I = V \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} V^{-1} \qquad \operatorname{Ker}(\operatorname{sign}(A) + I) = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$$

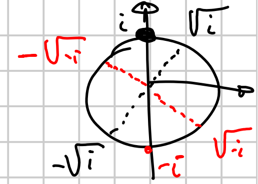
Calcolare $\operatorname{Ker}(\operatorname{sign}(A) \pm I)$ è un modo di calcolare sottospazi invarianti della matrice A.

Se trovassi un modo di calcolare $\operatorname{sign}(A)$ senza passare dalla forma di Jordan, riuscirei a usarlo per calcolare sottospazi invarianti.

$\operatorname{Ker}(\operatorname{sign}(A)+I)$ = sottosp. inv. associato alle catene di Jordan nel semipiano sinistro.

$\operatorname{Ker}(\operatorname{sign}(A)-I)$ = " " semipiano destro.

ES: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $f(x) = \sqrt{x}$



$\Lambda(A) = \{\pm i\}$

$$f(i) = \frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad f(-i) = \frac{-i+1}{\sqrt{2}} \;\longrightarrow\; p(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2}}$$

$$f(A) = f\left(V \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} V^{-1}\right) = V \begin{bmatrix} \frac{i+1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-i+1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} V^{-1}$$

Oppure, via polinomio di interpolazione: $p(x) = \frac{1+x}{\sqrt{2}}$

$$f(A) = p(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quella che ottengo prendendo $f(\lambda_i)$ nel semipiano destro (quando possibile) si chiama radice quadrata <u>principale</u> di A.

<u>ES</u>: calcolare $g(A)$ scegliendo branch diversi: $g(i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$g(-i) = -f(-i) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

In questo caso risulta $g(A)$ <u>non</u> è una matrice reale (non ha neppure autovalori complessi coniugati)

Non-esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

La matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ <u>non</u> è una funzione di matrice secondo la nostra definizione: <u>non</u> la ottengo scegliendo un ramo di $\sqrt{x}$ e applicandolo a tutti i blocchi di

Jordan di A.

Però è una matrice che soddisfa $B^2=A$. Quindi le funzioni di matrice non sono le uniche soluzioni dell'equazione $X^2=A$

Oss: B non è $p(A)$ per nessun polinomio p:

$$p(A)=\begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ & p(2) \end{bmatrix} \quad \text{ha} \quad [p(A)]_{1,1}=[p(A)]_{2,2}.$$

("funzioni non primarie")

Prossime lezioni:
- lun 13 solo da confermare
- mar 14
- gio 16
- no 21-23 mar
- mar 28
- ⋮
- no 9-11 maggio

Lemma (interpolazione di Hermite)

Dati punti $x_1, x_2, \dots x_n$, distinti, molteplicità $m_1, m_2, \dots m_n$, (valori y_{ij})

esiste uno e un solo polinomio di grado $\deg(p) < m_1+m_2+\dots+m_n$ tale che

$i=1,2,\dots n$

$$p(x_i)=y_{i0}, \quad p'(x_i)=y_{i1}, \quad \dots \quad p^{(m_i-1)}(x_i)=y_{i,m_i-1}$$

Dim: Questo problema è equivalente a un sistema di $m_1+m_2+\dots+m_n$ equazioni in $m_1+m_2+\dots+m_n$ incognite

$$V \cdot a = y$$

vettore dei coefficienti di p → valori assegnati

matrice contenente gli x_i

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

"Vandermonde generalizzata".

Basta dimostrare che V è invertibile.

Supponiamo per assurdo che esista $b \neq 0$ t.c. $Vb = 0$

Costruisco polinomio associato $b(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_d x^d$

$$Vb = 0 \iff b(x_i) = 0,\ b'(x_i) = 0, \dots\ b^{(m_i - 1)}(x_i) = 0$$

per ogni $i = 1, 2, \dots n$

Allora $(x - x_i)^{m_i}$ divide $b(x)$ per ogni $i = 1, 2, \dots n$

$$(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_n)^{m_n} \mid b(x)$$

Ma $b(x)$ ha grado $< m_1 + m_2 + \dots + m_n \Rightarrow b(x) = 0$

assurdo, quindi V invertibile.

Proprietà delle funzioni di matrici:

1) Per ogni M invertibile, $f(MAM^{-1}) = M f(A) M^{-1}$

Se f è un polinomio, basta espandere $\sum_i a_i (MAM^{-1})^i$

$$= \sum_i a_i M A^i M^{-1}$$

Però so che per ogni A, f esiste $p_{A,f}$ t.c. $f(A) = p_{A,f}(A)$

2) $f\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{bmatrix}$ per ogni A, B quadrate

Basta rimpiazzare la f con un polinomio che la interpola in $\Lambda(A)$, $\Lambda(B)$ con molteplicità suff. alte.

3) Se $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$, con molteplicità, allora

$$\Lambda(f(A)) = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots f(\lambda_n)\}$$ con le stesse molteplicità <u>algebriche</u>.

$$A = V \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix} V^{-1} \qquad f(A) = V \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_k) \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

<u>Oss</u>: se ho $f'(\lambda_i) = 0$, le molt. geometriche cambiano:

es. $$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$$ ha molt. geometrica più alta

4) se $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ identità tra funzioni scalari f, g, h allora la stessa identità $f(A) \cdot g(A) = h(A)$ vale tra le funzioni di matrici corrispondenti (per tutte le A su cui sono definite), e la stessa cosa per somme e composizioni di funzioni.

<u>Dim</u>: posso rimpiazzare f, g con p_f, p_g polinomi tali che $f(A) = p_f(A)$, $g(A) = p_g(A)$

Definendo $p_h(x) \doteq p_f(x)\, p_g(x)$ ho

$$p_h(A) = p_f(A) \cdot p_g(A)$$ (da calcoli algebrici, sono polinomi in A che commutano)

e p_h è un pol. di interpolazione per h

In particolare, identità tra funzioni scalari come

$$(\sqrt{x})^2 - x = 0 \longrightarrow B = \sqrt{A} \text{ soddisfa } B^2 = A$$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \qquad \sin(A)^2 + \cos(A)^2 = I$$

5) Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni tali che $f_n \to f$ puntualmente sugli autovalori di una matrice A e sulle loro derivate, cioè

$$\begin{array}{llll} f_n(\lambda_1) \to f(\lambda_1) & f_n'(\lambda_1) \to f'(\lambda_1) & \cdots & f_n^{(m_1-1)}(\lambda_1) \to f^{(m_1-1)}(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(\lambda_k) \to f(\lambda_k) & \cdots & & f_n^{(m_k-1)}(\lambda_k) \to f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \end{array}$$

Allora $f_n(A) \to f(A)$.

$$A = V \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$f(A) = V \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_k) \end{bmatrix} V^{-1} \qquad f\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(k_i-1)}(\lambda_i)}{(k_i-1)!} \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

6) Se ho $A_n \to A$ successione di matrici, allora $f(A_n) \to f(A)$ (se la f è definita): è più complicato da dimostrare.

Daremo una dimostrazione per f olomorfa.