Capitolo 5. Modelli di ZF

5.0 Riassumiamo brevemente alcune nozioni basilari di teoria dei modelli.

Un linguaggio $\mathcal{L}$ è un insieme di simboli $\mathcal{L} = \{R_i \mid i \in I\} \cup \{F_j \mid j \in J\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$

ove gli R_i sono simboli di relazioni, F_j simboli di funzioni, c_k simboli di costanti.

Ad ogni R_i, F_j è associato un intero positivo (la arietà della relazione o funzione).

I termini e le formule del linguaggio $\mathcal{L}$ sono stringhe di simboli scelti in $\mathcal{L}$, o

in un insieme numerabile $\mathcal{V}$ (detto insieme delle variabili) o tra i simboli logici:

$\vee, \wedge, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow$ (connettivi logici); $\exists, \forall$ (quantificatori); $=$ (uguale); $($, $)$ (parentesi).

Precisamente una stringa t è un termine se e solo se si ottiene nel modo seguente:

(i) t è una variabile o un simbolo di costante

(ii) $t \equiv F_j(t_1, \dots, t_s)$ ove $t_1, \dots, t_s$ sono termini ed F_j è un simbolo di funzione s-aria

Una stringa φ è una formula atomica se e solo se si ottiene come segue:

(iii) $\varphi \equiv R_i(t_1, \dots, t_n)$ ove $t_1, \dots, t_n$ sono termini ed R_i è un simbolo di relazione s-aria

(iv) $\varphi \equiv t_1 = t_2$ ove t_1, t_2 sono termini.

Una stringa φ è una formula se e solo se si ottiene come segue:

(v) φ è una formula atomica

(vi) $\varphi \equiv (\psi)\vee(\chi)$ ovvero $(\psi)\wedge(\chi)$ ovvero $(\psi)\to(\chi)$ ovvero $(\psi)\leftrightarrow(\chi)$ ovvero $\sim\psi$
ove ψ e χ sono formule

(vii) $\varphi \equiv \exists x(\psi)$ ovvero $\forall x(\psi)$ ove ψ è una formula e x una variabile

Se φ è una formula, definiamo le <u>variabili libere</u> in φ nel modo seguente

(viii) Se φ è atomica, allora ogni variabile che compare in un termine componente in φ è libera in φ ovunque essa compaia

(ix) Se φ si ottiene da ψ e χ mediante la (vi), allora ogni variabile che compare in ψ è libera in φ se e solo se lo è in ψ (ove essa compare), ed analogamente per le variabili che compaiono in χ

(x) Se $\varphi \equiv \exists x(\psi)$ o $\forall x(\psi)$ ogni variabile diversa da x è libera in φ se e solo se lo è in ψ ove compare, mentre x <u>non</u> è libera in φ -

Una variabile che compare in φ si dice <u>libera</u> se lo è in qualche luogo di φ, vincolata altrimenti. Una formula senza variabili libere si chiama <u>proposizione</u> o <u>sentenza</u> o <u>enunciato</u>.

Si chiama <u>struttura</u> o <u>modello</u> per $\mathcal{L}$ una coppia $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ ove M è un insieme (talvolta una classe) ed $\mathcal{I}$ un'applicazione che ad ogni ~~[illegible]~~ $\overbrace{\text{simbolo di rel. s-aria, risp. di funz. u-aria, risp. di cost}}$ di $\mathcal{L}$ associa una $\overbrace{\text{relazione}}^{\text{s-aria su } M}$ o risp. una $\overbrace{\text{funzione}}^{A^n \to A}$ o risp. un elemento di A. In generale un modello per $\mathcal{L}$ si nota per disteso $\mathcal{M} = (M;\ S_i\ i\in I;\ G_j\ j\in J;\ a_k\ k\in K)$ con ovvio significato della notazione.

Date due strutture per $\mathcal{L}$ $\mathfrak{A} = (A; S_i, G_j, a_k)$ $\mathfrak{B} = (B; T_i, H_j, b_k)$ si dice che

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ è <u>sottostruttura</u> o <u>sottomodello</u> di $\mathfrak{B}$) se $A \subseteq B$ e per ogni i, j, k

si ha $S_i = T_i \cap A^{s_i}$; $G_j = H_j|_{A^{m_j}}$; $b_k = a_k$

Un <u>isomorfismo</u> di $\mathfrak{A}$ su $\mathfrak{B}$ è una bigezione $\sigma : A \longrightarrow B$ t.c. $\forall i, j, k$

si abbia $\forall a_1, \ldots, a_s \in A \quad S_i(a_1, \ldots, a_s) \iff T_i(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_s))$

$\forall a, a_1, \ldots, a_m \in A \quad a = G_j(a_1, \ldots, a_m) \iff H_j(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)) = \sigma(a)$

$$\sigma(a_k) = b_k$$

La definizione fondamentale della teoria dei modelli è la seguente: si dice che una formula φ è soddisfatta (o vale) nel modello $\mathfrak{A}$ per l'assegnamento f, e si nota

$$\mathfrak{A} \models \varphi\, [f] \qquad \text{ove } f : \mathcal{V} \longrightarrow A$$

se la formula φ risulta "vera" interpretando mediante $\mathfrak{I}$ i simboli di $\mathcal{L}$, sostituendo alle variabili i valori loro assegnati da f, e dando ai connettivi logici, ai quantificatori e all' $=$ i significati consueti.

<u>Esercizio</u> 5.1 Si dia una rigorosa definizione induttiva di $\mathfrak{A} \models \varphi\, [f]$

[sugg.: Utilizzando (i) ed (ii) si estenda f ad $\bar{f}$: Termini $\longrightarrow A$; indi, da (iii) ed (iv) si deduca una definizione di $\mathfrak{A} \models \varphi\, [f]$ se φ è atomica; si usino infine i significati intuitivi dei connettivi logici e dei quantificatori per definire $\mathfrak{A} \models \varphi\, [f]$ quando già si sappia definire $\mathfrak{A} \models \psi\, [f]$ e $\mathfrak{A} \models \chi\, [f]$]

E' immediato verificare che se due assegnamenti f e g coincidono sulle variabili libere di φ, allora $\mathfrak{A} \models \varphi[f] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[g]$. Pertanto spesso, se le variabili libere di φ sono ~~$\{$~~ un sottinsieme di $\{x_1, \dots, x_n\}$ e se $f(x_i) = a_i$ $(i = 1, \dots, n)$ si scriverà $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ e $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ intendendo $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$.

Si osservi che in particolare se φ è una <u>sentenza</u> $\mathfrak{A} \models \varphi$ vale o non vale indipendentemente dall'assegnamento prescelto, che potrà pertanto essere omesso.

Se si ha un insieme Φ di formule $\mathfrak{A} \models \Phi[f]$ significherà $\mathfrak{A} \models \varphi[f]$ per ogni $\varphi \in \Phi$ (Si osservi che se Φ è finito si può sempre ridursi ad una sola formula considerando la congiunzione degli elementi di Φ).

Se Σ è un insieme di <u>sentenze</u>, ogni struttura $\mathfrak{A} \models \Sigma$ si dice un <u>modello di</u> Σ. L'insieme di tutte le sentenze di $\mathcal{L}$ valide in un modello $\mathfrak{A}$ si chiama la <u>teoria di</u> $\mathfrak{A}$.

E' noto che vi sono semplici regole di deduzione che permettono, dato un insieme Σ di sentenze, di determinare altre sentenze come <u>conseguenze</u> o <u>deduzioni</u> di Σ.

Σ si dice coerente se esistono sentenze non deducibili da Σ (equivalentemente se non si può dedurre da Σ una sentenza della forma $\varphi \wedge \sim\varphi$).

Il legame fra il concetto sintattico di deducibilità e la teoria dei modelli è dato dal seguente

Teorema di completezza: Un insieme di sentenze Σ è coerente se e solo se possiede un modello.

Non dimostreremo il teorema di completezza in quanto esula dai nostri scopi; ne deduciamo invece due utili corollari (notiamo $\Sigma \vdash \tau$ per τ si deduce da Σ)

Corollario 1 $\Sigma \vdash \tau \iff$ in Ogni modello di Σ vale anche τ.

Corollario 2 (teorema di compattezza): Un insieme di sentenze Σ ha un modello se e solo se ogni suo sottoinsieme finito ne ha uno.

Corollario 3: Se τ vale in ogni modello di Σ vale anche in ogni modello di un opportuno sottoinsieme finito di Σ

Osserviamo che si potrebbe utilizzare il corollario 1 per definire semanticamente la deducibilità: in tal caso il teorema di completezza diverrebbe banale, ma il teorema di compattezza non sarebbe più un corollario.

Esercizio 5.2 Si dimostri che se σ e τ sono sentenze $\sigma \vdash \tau \iff \phi \vdash \sigma \to \tau$.

Ciò non vale per formule φ, ψ con variabili libere, anche se non in comune.

Citiamo ancora per conoscenza l'importante teorema che permette di avere modelli di cardinalità limitata:

Teorema (di Löwenheim-Skolem): Se un insieme di sentenze Σ è coerente, allora ha un modello $\mathfrak{A}$ t.c. $|A| \leq |\Sigma| + \aleph_0$.

In particolare, se $\mathcal{L}$ è numerabile, ogni insieme coerente di sentenze ammette un modello finito o numerabile.

L'aspetto paradossale di tale teorema (un modello numerabile della teoria degli insiemi deve verificare, ad es., il teorema di Cantor $2^{\aleph_0} > \aleph_0$) mette in luce l'importanza del concetto di assolutezza di una formula. Si pone allora

Definizione 5.1: Siano $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modelli per $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$; sia φ una formula di $\mathcal{L}$ ~~e sia f assegnamento $f: \mathcal{V} \to A \subseteq B$~~. Diremo allora

(i) φ è stabile per estensione da $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ se $\mathfrak{A} \models \varphi[f] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f]$

(ii) φ è stabile per restrizione da $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{A}$ se $\mathfrak{B} \models \varphi[f] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f]$

(iii) φ è assoluta fra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ se $\mathfrak{B} \models \varphi[f] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[f]$

per ogni assegnamento $f: \mathcal{V} \longrightarrow A \subseteq B$.

Un termine t è stabile o assoluto secondo che lo è la formula $x = t$, ove x è una variabile che non compare in t.

Lemma 5.2 Sia $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ una formula assoluta fra due modelli $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Se esiste una funzione di Skolem f per φ in $\mathfrak{B}$ tale che $\hat{f}(A^n) \subseteq A$, allora

anche $\exists y \varphi$ è assoluta fra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

Dim: Per lemma 5.1.3 $\exists y \varphi$ è stabile per estensione; resta dunque da dimostrare che $\mathfrak{B} \models \exists y \varphi [a_1, \dots, a_n] \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y \varphi [a_1, \dots, a_n] \quad \forall a_1, \dots, a_n \in A$. Ma questo è ovvio utilizzando la funz. di Skolem f e tenendo presente che $f(a_1, \dots, a_n) \in A$.

QED

Concludiamo con un'ultima nozione che avrà grosse applicazioni in seguito:

Definizione 5.3 Dati due modelli $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ si dice che $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ è sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$) se ogni formula è assoluta fra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

Un'immersione elementare $j : \mathcal{C} \to \mathfrak{B}$ è un isomorfismo fra $\mathcal{C}$ ed un sottomodello elementare di $\mathfrak{B}$.

Tenendo conto che ogni formula si può esprimere equivalentemente con l'uso del solo quantificatore esistenziale (ed anche, ma qui non occorre, coi soli connettivi $\sim$ e $\vee$), dai lemmi 5.1 e 5.2 segue immediatamente:

Corollario 5.3.1: Se esiste un insieme F di funzioni di Skolem in $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, una per ogni formula di $\mathcal{L}$, e se A è chiuso per ogni elemento di F, allora $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Definizione 5.4 Dicesi famiglia di Skolem per un modello $\mathfrak{A}$ una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni di Skolem tale che per ogni formula φ esiste $f \in \mathcal{F}$ che è di Skolem per φ in $\mathfrak{A}$.

Osservando che l'insieme delle formule di un linguaggio $\mathcal{L}$ ha per cardinalità $\|\mathcal{L}\| = \max(\aleph_0, |\mathcal{L}|)$, è immediato dimostrare il seguente

Lemma 5.3 Ogni modello $\mathfrak{A}$ per il linguaggio $\mathcal{L}$ possiede famiglie di Skolem $\mathcal{F}$ tali che $|\mathcal{F}| \leq \|\mathcal{L}\|$

Mediante i lemmi precedenti dimostreremo allora il seguente teorema, da cui è facile dedurre il teorema di Löwenheim-Skolem in forma ancor più forte di quella a p.65:

Teorema 5.1: Sia $\mathfrak{B}$ un modello per $\mathcal{L}$ e sia $C \subseteq B$ (universo di $\mathfrak{B}$). Allora esiste un sottomodello elementare $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ t.c. $C \subseteq A \subseteq B$ e $|A| \leq |C| + \|\mathcal{L}\|$.

Dim: Sia $\mathcal{F}$ una fam. di Skolem per $\mathfrak{B}$, $|\mathcal{F}| \leq \|\mathcal{L}\|$. Porremo $A_0 = C$, $A_{n+1} = A_n \cup \mathcal{F}(A_n)$ ove $\mathcal{F}(A_n) = \{x \in B \mid \exists f \in \mathcal{F}, x_1, \dots, x_m \in A_n \text{ t.c. } x = f(x_1, \dots, x_m)\}$.
Sia allora $\mathfrak{A}$ il sottomodello di $\mathfrak{B}$ avente per universo $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ e per relaz., funz., cost quelle indotte da $\mathfrak{B}$. E' ovvio che A verifica le condizioni richieste e, per il Coroll.5.3.1, $\mathfrak{A}$ risulta sottomodello elementare di $\mathfrak{B}$ (si osservi che in una famiglia di Skolem ci sono necessariamente tutte le costanti e tutte le funzioni di $\mathfrak{B}$).

QED

5.1 I risultati e le definizioni del paragrafo 5.0 valgono naturalmente nel caso (cui ci limiteremo d'ora in poi) in cui $\mathcal{L} = \{\in\}$ è il linguaggio della teoria degli insiemi col solo simbolo di relazione $\in$. In tal caso un modello per $\mathcal{L}$ è una coppia $\mathfrak{A} = (A, E)$ ove A è un insieme (talvolta una classe) ed E una relazione binaria su A. Un modello $\mathfrak{A}$ si dice <u>standard</u> se $E = \in \cap A \times A$; in tal caso spesso si indicherà il solo universo A, e si scriverà semplicemente $A \models \varphi[f]$ intendendo $(A, \in \cap A\times A) \models \varphi[f]$.

Nel caso del linguaggio $\mathcal{L}$ è utile la classificazione delle formule dovuta a Lévy:

Definizione 5.5 : <u>Un quantificatore si dice ristretto nella formula φ se compare nel modo seguente:</u> $\exists x (x \in y \wedge \psi)$ ovvero $\forall x (x \in y \rightarrow \psi)$

<u>Come è usuale i quantificatori ristretti si scrivono in forma abbreviata:</u> $\exists x \in y\, (\psi)$ ovvero $\forall x \in y\, (\psi)$.

<u>Una formula si dice ristretta se ogni quantificatore che vi compare è ristretto.</u>

Definizione 5.6 Gli insiemi di formule Σ_n e Π_n sono definiti induttivamente dalle seguenti prescrizioni:

(i) $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0 = \{\varphi \mid \varphi$ ristretta $\}$

(ii) $\varphi \in \Sigma_n \Longrightarrow \forall x \varphi \in \Pi_{n+1}$

(iii) $\varphi \in \Pi_n \Longrightarrow \exists x \varphi \in \Sigma_{n+1}$

Questa definizione è puramente sintattica; diventa interessante la sua generalizzazione semantica ad una teoria T (insieme di sentenze), che nel nostro caso sarà usualmente ZF (ossia la teoria con gli assiomi A.1,.., A8, A10) e raramente qualche sua estensione.

Definizione 5.6 Sia T una teoria. Gli insiemi di formule Π_n^T, Σ_n^T, Δ_n^T sono definiti nel modo seguente

(i) $\varphi \in \Pi_n^T$ (risp. Σ_n^T) se esiste $\psi \in \Pi_n$ (risp. Σ_n) t.c. $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$

(ii) $\Delta_n^T = \Sigma_n^T \cap \Pi_n^T$

Esercizio 5.3 Si dimostri che se T contiene ZF, allora valgono le seguenti asserzioni:

1. Se $m < n$, allora $\Sigma_m^T \cup \Pi_m^T \subseteq \Delta_n^T$

2. $\varphi \in \Sigma_n^T \Longleftrightarrow \sim\varphi \in \Pi_n^T$; $\varphi \in \Pi_n^T \Longleftrightarrow \sim\varphi \in \Sigma_n^T$

3. $\varphi, \psi \in \Sigma_n^T$ (risp. Π_n^T) $\Longrightarrow \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi \in \Sigma_n^T$ (risp. Π_n^T)

4. $\varphi \in \Sigma_n^T, \psi \in \Pi_n^T \Longrightarrow \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi \in \Delta_{n+1}^T$; $\varphi \rightarrow \psi \in \Pi_n^T$; $\psi \rightarrow \varphi \in \Sigma_n^T$

5. $\varphi \in \Sigma_n^T \Longrightarrow \forall x\varphi \in \Pi_{n+1}^T$ e (se $n>0$) $\exists x\varphi \in \Sigma_n^T$

6. $\varphi \in \Pi_n^T \Longrightarrow \exists x\varphi \in \Sigma_{n+1}^T$ e (se $n>0$) $\forall x\varphi \in \Pi_n^T$

7. $\bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n^T = \bigcup_{n\in\omega} \Pi_n^T = \bigcup_{n\in\omega} \Delta_n^T = \{\varphi \mid \varphi \text{ formula}\}$

[N.B. Gli assiomi di rimpiazzamento, fondazione, infinito non sono mai richiesti; si cominci col dimostrare 5 e 6, notando che $z=\{x,y\}$ è Δ_0^T]

L'importanza del considerare la quantificazione ristretta risulta dal seguente

Lemma 5.4: Sia T una teoria contenente ZF. Allora se $\varphi\in\Sigma_n^T$ (risp. $\varphi\in\Pi_n^T$)

anche $\forall x\in y\varphi$ e $\exists x\in y\varphi \in \Sigma_n^T$ (risp. Π_n^T).

Dim: Il caso $\varphi\in\Pi_n^T$ segue usando la negazione da quello in cui $\varphi\in\Sigma_n^T$; d'altra parte è ovvio che $\varphi\in\Sigma_n^T \Longrightarrow \exists x\in y\varphi\in\Sigma_n^T$ (vedi Eserc. 5.3.5).
Resta dunque da vedere che $\forall x\in y\varphi\in\Sigma_n^T$; ciò è ovvio se $n=0$; si procederà dunque per induzione supponendo la tesi per $n-1$.
Sia dunque $\varphi = \exists t\psi$ ove $\psi\in\Pi_{n-1}^T$, e sia z una variabile che non compare in ψ.
Si consideri $\{t \mid t \text{ ha rango minimo fra quelli per cui vale } \psi(x,t)\} = I(x)$ (ovviamente $I(x)=\emptyset$ se non esiste nessun tale t); $I(x)$ è un insieme perché $\subseteq$ in qualche V_α.
Ponendo $z=\bigcup_{x\in y} I(x)$ si ha ovviamente in ogni teoria $T\supseteq ZF$ (si osservi che qui si è usato anche l'assioma di fondazione e il rimpiazzamento):
$T\vdash \forall x\in y[\exists t\psi(x,t) \Longleftrightarrow \exists t\in z\,\psi(x,t)]$ e quindi
$T\vdash \forall x\in y\,\exists t\,\psi(x,t) \Longleftrightarrow \exists z\,\forall x\in y\,\exists t\in z\,\psi(x,t)$
Quest'ultima formula è Σ_n^T per ipotesi induttiva, in quanto $\psi(x,t)\in\Pi_{n-1}^T$.

Spesso si dirà brevemente che un termine definito, del tipo $t=\{x \mid \varphi(x)\}$, è Σ_n^T (risp. Π_n^T, Δ_n^T) se lo è la formula $y=t$ (ove y è una variabile che non compare in t). E' immediato allora, utilizzando per $\varphi(x)$ un'espressione alternativamente Σ_n e Π_n, dimostrare

<u>Coroll.</u> 5.4.1 <u>Se</u> $\varphi(x) \in \Delta_n^T$, <u>allora</u> $\{x \mid \varphi(x)\} \in \Pi_n^T$ <u>e</u>

$\{x \in a \mid \varphi(x)\} \in \Delta_n^T$ (<u>purchè</u> $n \geq 1$)

Il modo più potente di definire termini è però l'induzione transfinita: in generale si definisce un termine t_α induttivamente purchè si disponga di una formula $\psi(x, \alpha, b_1, \dots, b_n; y)$ di tipo funzionale, cioè tale che $\forall x, \alpha, b_1, \dots, b_n$ esista un sol y verificante ψ. In tal caso $y = t_\alpha \longleftrightarrow \psi(t/_\alpha, \alpha, b_1, \dots, b_n; y)$.

Per le definizioni per induzione vale il seguente

<u>Lemma</u> 5.5 <u>Sia</u> t_α <u>definito</u> <u>induttivamente</u> <u>dalla</u> <u>formula</u> <u>funzionale</u> $\psi \in \Sigma_1^T$.

<u>Allora</u> $t_\alpha \in \Delta_1^T$.

<u>Dim</u>: In effetti $y = t_\alpha \Longleftrightarrow \exists f\,(f$ <u>ben fatta per</u> ψ, $\alpha \in \mathrm{dom} f$ e $f(\alpha)=y)$

$\Longleftrightarrow \forall f\,(f$ <u>ben fatta per</u> ψ, $\alpha \in \mathrm{dom} f \longrightarrow f(\alpha)=y)$

Ove f <u>ben fatta</u> per ψ significa che f è una funzione, il dominio di f è un ordinale e $\forall \beta \in \mathrm{dom} f$ si ha $z = f(\beta) \Longleftrightarrow \psi(f|_\beta, \beta, b_1, \dots, b_n; z)$. E' immediato constatare che la definizione data di <u>ben fatta</u> coincide e formalizza il concetto di definizione per induzione, e che pertanto due funzioni ben fatte coincidono sugli argomenti comuni; ora la tesi seguirà dal coroll. 5.4.1 a patto che "f ben fatta per φ" sia Σ_1^T (vedi anche l'esercizio 5.3): e scrivendo esplicitamente la definizione in modo formale, si vede immediatamente che è composta di ψ (che è Σ_1^T) e di altre formule (di tipo Δ_0^T per l'es. suddetto), pertanto Σ_1^T come voluto.

QED

I risultati precedenti permettono, con un semplice ma assai tedioso lavoro di scrittura e riscrittura formale delle definizioni, di ottenere una catalogazione di quasi tutte le nozioni insiemistiche introdotte; elenchiamo le più utili nel seguente

<u>Esercizio</u> 5.3. 1. Sono Δ_0^{ZF} le seguenti formule ed i seguenti termini:

$x \subseteq y$, $\emptyset$, $\{x,y\}$, (x,y), $x \times y$, $x - y$, $x \cap y$,

x transitivo, α ordinale, α limite, $\bigcup x$, $x \cup \{x\}$, ω, n,

r relazione, f funzione, f iniettiva, $\mathrm{Dom}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, $f(x)$, $\hat{f}(x)$, $f_{|x}$.

2. Sono Δ_1^{ZF}: $TC(x)$, $\rho(x)$, V_ω, ${}^nA$,

r ben fondata su x, r buon ordinamento su x,

$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, α^β (come ordinali)

3. Sono Σ_1^{ZF}: $|x|=|y|$, $|x| \leq |y|$, x numerabile, $\mathrm{cof}\, x = \mathrm{cof}\, y$

4. Sono Π_1^{ZF}: μ cardinale, μ regolare, μ limite, μ inaccessibile,
$\mathcal{P}(x)$ ${}^{y}x$