Esponenziazione dei numeri cardinali

Se μ, ν sono cardinali infiniti, e n è un intero, valgono le ovvie uguaglianze:

$$(1.1) \qquad \mu^n = \mu \qquad n^\nu = 2^\nu = \aleph_0^\nu$$

Valgono inoltre le disuguaglianze:

$$(1.2) \qquad \nu_1 \le \nu_2 \implies 2^{\nu_1} \le 2^{\nu_2} \quad \text{e} \quad \mu^{\nu_1} \le \mu^{\nu_2}$$

$$(1.3) \qquad 2^\nu > \nu \qquad \mu^\nu > \nu \quad \text{e} \quad \mu^\nu \ge \mu$$

$$(1.4) \qquad \mathrm{cof}\, 2^\nu > \nu \qquad \mathrm{cof}\, \mu^\nu > \nu \qquad \mu^{\mathrm{cof}\,\mu} > \mu$$

(le (1.3), (1.4) sono conseguenze dirette della disuguaglianza di König-Zermelo).

E' interessante notare che le relazioni (1.2), (1.3), (1.4) sono le sole ~~[illegible]~~ dimostrabili in ZFC per la funzione $\nu \mapsto 2^\nu$, almeno per quanto riguarda i cardinali regolari.

Vale in effetti il teorema seguente, che riportiamo senza dimostrazione in quanto coinvolge tecniche e risultati assai complessi:

Teorema (Easton, 1970): Sia $F: \mathrm{Card} \to \mathrm{Card}$ una funzione verificante le condizioni

$$F(\nu) > \nu \quad , \quad \mathrm{cof}(F(\nu)) > \nu \quad , \quad \nu_1 \le \nu_2 \implies F(\nu_1) \le F(\nu_2) \, .$$

Allora esiste un modello della teoria degli insiemi ZFC in cui $2^\nu = F(\nu)$ per ogni cardinale regolare ν.

La situazione è differente per i cardinali singolari; vedremo infatti che il valore di 2^ν su un cardinale singolare ν è determinato dalla conoscenza di 2^ξ ~~[illegible]~~ e di $\gimel(\xi) = \xi^{\operatorname{cof}\xi}$ per $\xi < \nu$ regolare. Si osservi che, ovviamente,

$$(1.5) \qquad \gimel(\xi) = \xi^\xi = 2^\xi \qquad \text{per } \xi \text{ regolare}$$

Definendo allora $\quad 2^{<\nu} = \sup\{2^\xi \mid \xi < \nu\}$ $\quad$ (definizione interessante solo per ν limite, in quanto ovviamente $2^{<\nu^+} = 2^\nu$) si ~~può~~ vede immediatamente che $2^{<\nu} = \sup\{2^\xi \mid \xi \text{ regolare} < \nu\}$ ogniqualvolta ν è limite, e pertanto il valore di $2^{<\nu}$ è determinato dai valori di 2^ξ per ξ regolare. Il teorema seguente mostra allora che la funzione 2^ν è determinata dai valori della funzione $\gimel$.

<u>Teorema</u> 1 (Bukowski)

$$(1.6) \qquad 2^\nu = \begin{cases} \gimel(\nu) & \underline{\text{se } \nu \text{ è regolare}} \\ 2^{<\nu} & \underline{\text{se}}\ \exists \zeta < \nu\ \underline{\text{t.c.}}\ 2^\zeta = 2^{<\nu}\ \underline{\text{e } \nu \text{ è singolare}} \\ \gimel(2^{<\nu}) & \underline{\text{altrimenti}} \end{cases}$$

<u>Dim</u>

La prima delle (1.6) è ovvia (vedi (1.5)). Le restanti due relazioni seguono direttamente dall'uguaglianza

$$(1.7) \qquad 2^\nu = (2^{<\nu})^{\operatorname{cof}\nu} \qquad \underline{\text{se}}\ \nu\ \underline{\text{è limite}}$$

In effetti se ν è singolare e $2^{<\nu} = 2^\zeta$, da (1.7) segue subito $2^\nu = 2^{\zeta \operatorname{cof}\nu} \leq 2^{<\nu} \leq 2^\nu$.
Se invece 2^ξ non è defin. cost. sotto ν, allora $\operatorname{cof} 2^{<\nu} = \operatorname{cof}\nu$ e dalla (1.7) segue $2^\nu = \gimel(2^{<\nu})$

Occorre dunque dimostrare la (1.7); sia dunque $\nu = \sum_{\iota \in \mathrm{cof}\,\nu} \nu_\iota$ con $\nu_\iota < \nu$ $\forall \iota$:

$$2^\nu = 2^{\sum \nu_\iota} = \prod_{\mathrm{cof}\,\mu} 2^{\nu_\iota} \leq (2^{<\nu})^{\mathrm{cof}\,\nu} \leq 2^{\nu\,\mathrm{cof}\,\nu} = 2^\nu .$$

QED

Vediamo ora che anche la funzione μ^ν è determinata dai valori della funzione $\beth$ (purchè si conoscano le cofinalità dei cardinali: pertanto anche la funzione cof è necessaria).

Premettiamo alcune relazioni in aggiunta alle (1.1) - (1.5), la cui dimostrazione è immediata:

(2.1) $\quad 2^\nu \geq \mu \implies 2^\nu = \mu^\nu$

(2.2) $\quad \xi < \mu,\ \xi^\nu \geq \mu \implies \xi^\nu = \mu^\nu$

Per lo studio ulteriore è fondamentale l'osservazione seguente:

<u>Lemma</u> 1 <u>Sia</u> $f : \nu \longrightarrow \mu$, <u>e sia</u> $\nu < \mathrm{cof}\,\mu$. <u>Allora esiste</u> $\alpha \in \mu$ <u>t.c.</u> $\mathrm{Im} f \subseteq \alpha$.

<u>Pertanto</u> ${}^\nu\mu \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mu} {}^\nu\alpha$ <u>da cui segue</u>

(2.3) $\quad \mu^\nu = \sum_{\xi < \mu} \xi^\nu \xi^+$ <u>se</u> $\nu < \mathrm{cof}\,\mu$

<u>Dim</u>: L'immagine di f non può essere cofinale in μ, e quindi vale la prima asserzione. La (2.3) segue osservando che $|{}^\nu\alpha| = |\alpha|^\nu$ e $|\{\alpha \mid |\alpha| = \xi\}| = \xi^+$ QED

Dal <u>lemma</u> 1 e dalle ovvie disuguaglianze precedenti si deduce la <u>formula di Hausdorff</u>:

(2.4) $\quad (\mu^+)^\nu = \mu^\nu \cdot \mu^+$

e quindi, per induzione su n,

$$(2.5)\qquad (\aleph_{\alpha+n})^{\nu} = \aleph_{\alpha}^{\nu} \cdot \aleph_{\alpha+n} \qquad \text{per ogni ordinale } \alpha$$

La (2.5), unitamente alla (1.1), riduce il problema dell'esponenziale alle sole basi 2 (già studiata nel teorema 1) e cardinali limite. Quest'ultimo caso non è ancora completo; dimostriamo allora

Lemma 2 Sia μ un cardinale limite e sia $\nu \geq \mathrm{cof}\,\mu$. Si ha allora

$$(2.6)\qquad \mu^{\nu} = \Big(\sup_{\xi<\mu} \xi^{\nu}\Big)^{\mathrm{cof}\,\mu} \qquad (\mu \text{ limite},\ \nu \geq \mathrm{cof}\,\mu)$$

Dim: Scrivendo $\mu = \sum_{\iota\in\mathrm{cof}\,\mu} \mu_\iota$ con $\mu_\iota < \mu$ $\forall \iota$, si ottiene (supponendo $\mu = \sup \mu_\iota$)

$$\mu^{\nu} \leq \Big(\prod_{\mathrm{cof}\,\mu} \mu_\iota\Big)^{\nu} = \prod_{\mathrm{cof}\,\mu} \mu_\iota^{\nu} \leq \Big(\sup_{\xi<\mu} \xi^{\nu}\Big)^{\mathrm{cof}\,\mu} \leq \mu^{\nu\,\mathrm{cof}\,\mu} = \mu^{\nu}.$$

QED

Possiamo ora riassumere i risultati dimostrati nel seguente

Teorema 2 (Bukowski). Se μ, ν sono cardinali transfiniti

$$(2.7)\qquad \mu^{\nu} = \begin{cases} 2^{\nu} & \text{se } 2^{\nu} \geq \mu \quad (\text{in particolare se } \nu \geq \mu) \\ \mu & \text{se } \xi^{\nu} \leq \mu\ \forall \xi<\mu \text{ e } \mathrm{cof}\,\mu > \nu \\ I(\mu) & \text{se } \xi^{\nu} < \mu\ \forall \xi < \mu \text{ e } \mathrm{cof}\,\mu \leq \nu < \mu \\ I(\zeta) & \text{altrimenti, ove } \zeta = \min\{\xi<\mu \mid \xi^{\nu} \geq \mu\} \\ & \text{e in tal caso } \mathrm{cof}\,\zeta \leq \nu < \zeta < \mu \end{cases}$$

Si noti che gli ultimi due casi si possono verificare solo se μ e rispettivamente ζ sono singolari.

Dim: La (2.1) dà il 1° caso e la (2.3) il 2°, la (2.6) il 3°.
Se non vale nessuno dei tre precedenti casi, allora ~~......~~ $\{\xi<\mu \mid \xi^\nu \geq \mu\} \neq \emptyset$ e quindi, per la (2.2) $\mu^\nu = \zeta^\nu$, ma $\zeta > \aleph_0$ (altrimenti $\mu^\nu = 2^\nu$).
Ragionando per induzione su μ si può allora supporre valida la tesi per ζ; ora però $2^\nu < \zeta^\nu$ ed anzi, per la minimalità di ζ, $\xi^\nu < \zeta$ $\forall \xi < \zeta$; allora, non potendo essere $\zeta^\nu = \zeta < \mu$, deve necessariamente aversi $\operatorname{cof} \zeta \leq \nu < \zeta$ e $\zeta^\nu = \mathcal{I}(\zeta)$.

QED

Si è dunque visto che l'esponenziazione dei cardinali è definibile in termini della funzione $\mathcal{I}$; si può anche osservare che il ricorso a $\mathcal{I}$ è indispensabile per i valori singolari; se ν è regolare esso coincide con 2^ν. Vediamo ora come alcune ipotesi aggiuntive possano semplificare l'aritmetica cardinale.

Corollario 1: Si assuma IGC (ossia $2^\nu = \nu^+$ per ogni cardinale transfinito ν):

allora si ha
$$\mu^\nu = \begin{cases} \mu & \text{se } \nu < \operatorname{cof}\mu \\ \mu^+ & \text{se } \operatorname{cof}\mu \leq \nu \leq \mu \\ \nu^+ & \text{se } \mu \leq \nu \end{cases}$$

Corollario 2 Si assuma ICS (ossia $2^{\operatorname{cof}\mu} < \mu \Longrightarrow \mathcal{I}(\mu) = \mu^+$ per ogni cardinale singolare μ):

allora si ha
$$\mu^\nu = \begin{cases} 2^\nu & \text{se } 2^\nu \geq \mu \quad (\text{in part. se } \nu \geq \mu) \\ \mu & \text{se } 2^\nu < \mu \text{ e } \nu < \operatorname{cof}\mu \\ \mu^+ & \text{se } 2^\nu < \mu \text{ e } \operatorname{cof}\mu \leq \nu < \mu \end{cases}$$

e, se ν è singolare
$$2^\nu = \begin{cases} 2^{<\nu} & \text{se } \exists\, \zeta < \nu \text{ t.c. } 2^\zeta = 2^{<\nu} \\ (2^{<\nu})^+ & \text{altrimenti (ossia se } \operatorname{cof} 2^{<\nu} = \operatorname{cof}\nu) \end{cases}$$

Si osservi che allora ICS equivale a $\mu^\nu \leq 2^\nu \mu^+$ per ogni μ, ν transfiniti.

Dim: Il corollario 1 si dimostra per induzione transfinita su μ immediatamente dalla (2.7).
Il coroll. 2 si dimostra anch'esso per indur. su μ, nell'ipotesi $2^\nu < \mu$: se μ è successore la formula di Hausdorff dà la tesi; se μ è limite allora $\xi^\nu < \mu$ $\forall \xi < \mu$ per ipotesi d'induzione, e quindi la (2.7) dà $\mu^\nu = \mu$ se $\nu < \mathrm{cof}\,\mu$; se poi $\nu \geq \mathrm{cof}\,\mu$ la (2.7) dà $\mu^\nu = \mu^{\mathrm{cof}\,\mu} = \mu^+$ (per ICS, dato che $2^{\mathrm{cof}\,\mu} \leq 2^\nu < \mu$, e μ singolare perché $\mu > \nu \geq \mathrm{cof}\,\mu$).
La 2ª parte del coroll. 2 è immediata dalla (1.6), tenendo conto che se 2^ξ non è def. cost. sotto ν, allora $\mathrm{cof}\,2^{<\nu} = \mathrm{cof}\,\nu$ ed (essendo ν singolare) $2^{\mathrm{cof}\,\nu} = 2^{\mathrm{cof}\,2^{<\nu}} < 2^{<\nu}$; pertanto ICS implica $\gimel(2^{<\nu}) = (2^{<\nu})^+ = 2^\nu$.
QED

E' notevole il fatto che ICS determina tutti i valori dell'esponenziale sulla base della sola funzione 2^ν per ν regolare, e lo fa assegnando il valore minimo compatibile con le condizioni (1.2), (1.3), (1.4). Un classico risultato di Jensen mostra che ICS certamente vale se non esistono cardinali eccessivamente grandi (precisamente se ICS è falsa, allora $0^\#$ esiste). D'altra parte, utilizzando tecniche di forcing unitamente a cardinali molto grandi si riesce a provarne l'indipendenza da ZFC.

Rimandiamo ad un successivo paragrafo lo studio di altri risultati sulle funzioni 2^ν e $\gimel(\nu)$ con ν singolare, e vediamo invece un classico teorema di Tarski, che è praticamente l'unico strumento per calcolare prodotti (di lunghezza infinita) di numeri cardinali.

Teorema 3 (Tarski)

$$(3.1) \qquad \prod_{\iota\in\nu} \mu_\iota = \left(\sup_{\iota\in\nu} \mu_\iota\right)^\nu \quad \text{se } 0 < \mu_\alpha \leq \mu_\beta \ \forall \alpha<\beta\in\nu \text{ e } \nu \text{ cardinale infinito}$$

N.B. Si può sempre supporre che la successione dei fattori sia non decrescente, ovvero che l'insieme degli indici sia un cardinale, ma non le due cose insieme.

<u>Dim</u>: Ovviamente, se $\mu = \sup_{\iota\in\nu} \mu_\iota$, $\prod \mu_\iota \leq \mu^\nu$.
Poichè ν è un cardinale infinito, si può ~~parti~~ trovare una partizione $\mathcal{P}$ di ν tale che ogni parte abbia cardinalità ν (e $|\mathcal{P}| = \nu$). Se ora consideriamo una qualunque parte x di tale partizione, $\sup_{\iota\in x} \mu_\iota = \mu$ in quanto, per ogni $\gamma<\mu$, $\{\iota\in\nu \mid \mu_\iota\leq\gamma\}$ ha cardinalità $<\nu$.
Allora

$$\prod_{\iota\in\nu} \mu_\iota = \prod_{x\in\mathcal{P}} \prod_{\iota\in x} \mu_\iota \geq \prod_{x\in\mathcal{P}} \sup_{\iota\in x} \mu_\iota = \mu^\nu .$$

Q.E.D.

Lasciamo agli esercizi, oltre ad alcuni calcoli effettivi, anche ulteriori proprietà dell'esponenziale.

<u>Esercizio</u> 1. <u>Se</u> $\alpha < \omega_1$, <u>allora</u> $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$
<u>Se</u> $\alpha < \omega_2$, <u>allora</u> $\aleph_\alpha^{\aleph_2} = \aleph_\alpha^{\aleph_1} \cdot 2^{\aleph_2}$

<u>Esercizio</u> 2. $\prod_{0<n\in\omega} n = 2^{\aleph_0}$; $\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$; $\prod_{\alpha\in\omega+\omega} \aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$

<u>Esercizio</u> 3 <u>Se</u> $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}$ per ogni α, <u>allora</u> $\beta\in\omega$.
[Sugg.: Si consideri il $\min\{\alpha \mid \alpha+\beta>\beta\}$, e si applichi (1.6) ad $\aleph_{\alpha+\alpha}$]

<u>Esercizio</u> 4 <u>Def</u>: Un cardinale ν è <u>limite forte</u> se $2^\xi < \nu$ per ogni $\xi<\nu$.
(i) ν è limite forte $\Rightarrow$ ν limite (e viceversa se vale IGC)
(ii) ν limite forte $\Leftrightarrow$ $\xi^\zeta < \nu$ $\forall \xi,\zeta<\nu$
(iii) ν limite forte $\Leftrightarrow$ $\nu = \beth_\lambda$ con λ limite (Ricordiamo $\beth_\alpha = |V_{\omega+\alpha}|$)
(iv) Sia μ un cardinale e pongasi $\nu_0 = \mu$, $\nu_{n+1} = 2^{\nu_n}$, $\nu = \sup_{n\in\omega} \nu_n$; allora si ha: ν è limite forte, $\operatorname{cof}\nu = \omega$, $\nu = \min\{\xi \text{ limiti forti} \mid \xi \geq \mu\}$.
(v) Se ν è limite forte $2^\nu = \mathfrak{I}(\nu)$

<u>Esercizio</u> 5 Ricordiamo che $\mu^{<\nu} = \sup_{\xi<\nu} \mu^\xi$. Si ha allora:
(i) $2^\mu = \mu^\mu \geq \mu^{<\mu} \geq 2^{<\mu} \geq \mu$ se μ limite (e almeno un $\geq$ è $>$)
(ii) $\mu^{<\mu} = 2^{<\mu}$ se μ limite e regolare (i.e. debol. inaccessibile)

(iii) $\mu^\mu > \mu^{<\mu} = 2^{<\mu} = \mu$ se μ limite forte e regolare (i.e. inaccessibile)
(iv) $\mu^{<\mu} = 2^{<\mu} > \mu$ se μ non limite forte, ma singolare
(v) $\mu^\mu = \mu^{<\mu} > 2^{<\mu} = \mu$ se μ limite forte e singolare

<u>Esercizio</u> 6. <u>Def</u> Un cardinale singolare μ è <u>bordato</u> se esiste $\xi < \mu$ t.c. $\xi^{\operatorname{cof}\mu} \geq \mu$.
(i) μ è bordato se e solo se $\exists \xi < \mu$ t.c. $\operatorname{cof}\xi \leq \operatorname{cof}\mu$ e $\mu \leq \mathfrak{I}(\xi)$
(ii) μ limite forte e singolare $\Longrightarrow$ μ non bordato (ma non viceversa)
(iii) Sia μ bordato. Se $\mathfrak{I}(\mu) \neq 2^{\operatorname{cof}\mu}$, allora $\mathfrak{I}(\mu) = \mathfrak{I}(\xi)$ ove $\xi = \min\{\xi \geq \operatorname{cof}\mu \mid \xi^{\operatorname{cof}\mu} \geq \mu\}$
[si dimostri che $\xi^{\operatorname{cof}\mu} \leq \mu$, $\xi < \mu \Longrightarrow \mu^{\operatorname{cof}\mu} = \xi^{\operatorname{cof}\mu}$ e si applichi la (2.7)]
(iv) Se μ è singolare ma non lim. forte, e se $\exists \xi < \mu$ t.c. $\operatorname{cof}\mu \leq \operatorname{cof}\xi$ e $\mu \leq \mathfrak{I}(\xi)$, allora $\mathfrak{I}(\mu) \leq \mathfrak{I}(\xi)$
(v) Se μ è singolare e limite forte, allora $\operatorname{cof}(\mathfrak{I}(\mu)) > \mu$. Più in generale
Se μ è singolare non bordato esistono ξ, ν t.c. $\xi < \mu$, $\xi^\nu \geq \mu$ e $\operatorname{cof}(\mathfrak{I}(\mu)) \geq \nu$
[$\nu > \operatorname{cof}\mu$ perché μ non è bordato; ma se $\xi^\nu < \mu$ $\forall \xi < \mu$, allora $\mathfrak{I}(\mu) = \mu^\nu$ e $\operatorname{cof}(\mu^\nu) > \nu$]
NB Le relazioni dell'<u>Es.</u> 6 sono verosimilmente le sole restrizioni dimostrabili sulla funzione $\mathfrak{I}$ (comunque le sole note ~~att~~ finora).

Concludiamo questo studio dell'esponenziazione dei cardinali con alcuni risultati sui cardinali singolari di cofinalità non numerabile. Per poter affrontare il problema è però necessario anteporre alcuni risultati preliminari.