5.3 Gödelizzazione della semantica.

Si può associare ad ogni formula φ un insieme $\ulcorner\varphi\urcorner$ mediante una qualche regola induttiva, ad esempio

<u>Def</u> $\ulcorner v_i = v_j \urcorner = (0,i,j)$, $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner = (1,i,j)$

$$\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner = (2, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner), \quad \ulcorner \sim\varphi \urcorner = (3, \ulcorner\varphi\urcorner), \quad \ulcorner \exists v_j \varphi \urcorner = (4, j, \ulcorner\varphi\urcorner)$$

E' immediato che ogni insieme della def precedente è in V_ω. E' ora possibile tradurre i concetti semantici dei paragrafi 5.1, 5.2 in relazioni insiemistiche; più precisamente vale il seguente

<u>~~Teorema~~</u> <u>Si possono definire relazioni insiemistiche verificanti le seguenti proprietà:</u>

(i) $\mathrm{Form}\ u$ è valida se e solo se $u = \ulcorner\varphi\urcorner$ per qualche formula φ

(ii) $\mathrm{Ver}(M,u,f)$ è valida se e solo se $u = \ulcorner\varphi\urcorner$ per qualche formula φ, con al più n var
$f: n \to M$ ~~[illegible]~~
e φ è verificata in M assegnando alla variabile v_i il valore $f(i)$.

(iii) $\mathrm{Skol}(f,u,M)$ è valida se e solo se $u = \ulcorner\varphi\urcorner$ per qualche formula con n variabili, $f: M^n \to M$ ed è una funzione di Skolem per $\exists v_0 \varphi$ ~~[illegible]~~ in M (interpretando $f(i)$ come $f(v_i)$).

(iv) $\mathrm{Skol}(F,M)$ è valida se e solo se F è numerabile e per ogni $f \in F$ è una funzione di Skolem in M, e per ogni formula φ esiste $f \in F$ t.c. $\mathrm{Skol}(f, \ulcorner\varphi\urcorner, M)$

(v) $Ax^{ZF}(u)$ è valida se e solo se $u = \ulcorner\varphi\urcorner$ ove φ è un assioma di ZF (e analogamente per ZFC)

(vi) $Mod^{ZF}(M)$ è valida se e solo se $M \models ZF$ (e analogamente per ZFC)

Inoltre le definizioni (i)-(vi) possono essere scelte Δ_1^{ZF}.

Teorema 1 (Skolem) $\forall M \exists F \; Skol(F, M)$

Teorema 2 (Gödel) Se in ZF si dimostrasse $\exists M \, (Mod^{ZF}(M))$, allora ZF sarebbe inconsistente.

Si osservi che il teorema 2 è più debole del classico teorema di Gödel, in quanto fa riferimento alla nozione di modello standard; per ottenere il teorema di Gödel completo occorrerebbe generalizzare lo sviluppo del presente paragrafo alle nozioni più generali del paragrafo 5.0.