§0. Algebre di Boole

Definizione 0.1 Si dice algebra di Boole un insieme B munito di due operazioni $+, \cdot$ verificanti

(i) $\forall x,y,z \in B$ $\quad x+(y+z)=(x+y)+z$, $\quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (associatività)

(ii) $\forall x,y \in B$ $\quad x+y = y+x$, $\quad x\cdot y = y\cdot x$ (commutatività)

(iii) $\forall x,y,z \in B$ $\quad x\cdot(y+z)= x\cdot y+x\cdot z$, $\quad x+ y\cdot z =(x+y)\cdot(x+z)$ (distributività)

(iv) $\exists\, 0,1 \in B$ t.c. $\forall x\in B$ $\quad x+0=x \quad x+1=1$, $\quad x\cdot 0=0 \quad x\cdot 1 =x$

(v) $\forall x\in B\ \exists -x \in B$ t.c. $\quad x+(-x)= 1$, $\quad x\cdot(-x)= 0$

Si dimostri, a titolo di esercizio, che in ogni algebra di Boole si ha

(iv)' $0,1$ sono univocamente determinati e $0=-1$

(v)' $-x$ è univocamente determinato da x e $-(-x)=x$

(vi) $x+x=x$ e $x\cdot x=x \quad \forall x\in B$

(vii) $x\cdot(x+y)=x \quad x+x\cdot y = x \quad \forall x,y\in B$ (assorbimento)

(viii) $-(x+y)=(-x)\cdot(-y) \quad -(x\cdot y)=(-x)+(-y) \quad \forall x,y\in B$ (De Morgan)

Si dimostri che in ogni algebra di Boole vi è una naturale relazione di ordine parziale, definita dalla

<u>Definizione</u> 0.2 $\quad x \le y$ <u>se e solo se</u> $\quad x \cdot y = x$

e se ne dimostrino le proprietà seguenti

(a) $\quad x + y = \sup\{x, y\} \qquad x \cdot y = \inf\{x, y\}$

(b) $\quad 1 = \max B \qquad 0 = \min B$

<u>Osservazione</u> 0.1 Le proprietà delle algebre di Boole sono un'assiomatizzazione dei cosiddetti <u>campi d'insiemi</u>:
dicesi campo d'insiemi su X un sottinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ contenente X e chiuso rispetto ad $\cup, \cap$, complemento (e quindi anche a differenza e differenza simmetrica).
È evidente che ogni campo d'insiemi su X è un'algebra di Boole ove $\cup, \cap, \emptyset, X, \complement, \subseteq$ corrispondono a $+, \cdot, 0, 1, -, \le$.
Il viceversa, vero, sarà dimostrato in seguito (cfr. Teorema 0.2)
Classici esempi di campi d'insiemi sono, oltre ovviamente l'intero $\mathcal{P}(X)$, anche i seguenti:

(i) X insieme infinito, $\mathcal{B} = \mathcal{P}_\omega(X) \cup \mathcal{P}^\omega(X)$
(ii) X spazio topologico $\quad \mathcal{B} = \{E \subseteq X \mid E \text{ aperto e chiuso}\}$
(iii) $X = \mathbb{R} \quad \mathcal{B} =$ boreliani di $\mathbb{R}$
$\qquad\qquad\quad \mathcal{B}' =$ Lebesgue-misurabili di $\mathbb{R}$

<u>Osservazione</u> 0.2 Un'algebra di Boole B diviene un anello commutativo con identità di caratteristica 2 definendo una nuova somma $\dotplus$ mediante $\quad x \dotplus y = x \cdot (-y) + (-x) \cdot y$
In esso 0 e 1 mantengono il loro significato, e si ha inoltre

$$(*) \quad x^2 = x \qquad \forall x \in B$$

Si dimostri che viceversa ogni anello ~~commutativo~~ con identità verificante $(*)$ risulta commutativo di caratteristica 2, e diviene un'algebra di Boole definendo una nuova somma $+'$ mediante

$$x +' y = x + y + xy$$

In tal caso 0 e 1 mantengono il loro significato, e $-'x = 1 + x$

Esempi importanti di algebre di Boole sono ~~esposti~~ trattati nei seguenti esercizi.

Esercizio 0.1 (Algebra di Lindenbaum) Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del 1° ordine e sia Σ l'insieme delle sentenze di $\mathcal{L}$.
Si definisca su Σ una relazione di equivalenza ponendo
$\sigma \equiv \tau$ se $\vdash \sigma \Longleftrightarrow \tau$ (ovvero se $\mathfrak{M} \models \sigma \Longleftrightarrow \tau$ per ogni modello per $\mathcal{L}$)
$B = \Sigma/\equiv$ diviene un'algebra di Boole definendo

$$[\sigma] + [\tau] = [\sigma \vee \tau] \qquad [\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma \wedge \tau]$$

In essa $0 = [\sigma \wedge \sim\sigma]$, $1 = [\sigma \vee \sim\sigma]$, $-[\sigma] = [\sim\sigma]$
inoltre $[\sigma] \leq [\tau]$ se e solo se $[\sigma \to \tau] = 1$.

Esercizio 0.2 Sia X uno spazio topologico. Un aperto $A \subseteq X$ si dice regolare se $A = \mathring{\overline{A}}$.
$\mathcal{B} = \{ A \subseteq X \mid A \text{ aperto regolare} \}$ diviene algebra di Boole definendo

$$A + B = \mathring{\overline{A \cup B}} \qquad A \cdot B = A \cap B$$

In essa $0 = \emptyset$, $1 = X$, $-A = X - \overline{A}$; inoltre
$A \leq B$ se e solo se $A \subseteq B$

Definizione 0.3: Siano B, C algebre di Boole. Un'applicazione $f : B \to C$ è un omomorfismo se soddisfa le condizioni seguenti:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

(ii) $f(1) = 1 \qquad f(-x) = -f(x)$

Si dimostri, a titolo di esercizio, che un omomorfismo di algebre di Boole verifica

anche (ii)' $f(0) = 0$

(iii) $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Esercizio 0.3 : Si dimostri che f è un isomorfismo se e solo se vale

(iii)' $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

(ii)' $f(1) = 1$

Definizione 0.4. 1. Un sottinsieme $A \subseteq B$ dicesi sotto-algebra di B se

(i) $0, 1 \in A$

(ii) $\forall x \in A \quad -x \in A$

(iii) $\forall x, y \in A \quad x+y \in A$ e $x.y \in A$

2. Un sottinsieme $I \subseteq B$ dicesi ideale (risp. filtro) di B se

(i) $0 \in I, 1 \notin I$ (risp. $0 \notin I, 1 \in I$)

(ii) $x, y \in I \Rightarrow x+y \in I$ (risp. $xy \in I$)

(iii) $x \in I \; y \leq x \Rightarrow y \in I$ (risp. $y \geq x \Rightarrow y \in I$)

Osservazione 0.4. L'immagine di un'algebra mediante un omomorfismo è ovviamente una sottoalgebra.

Il nucleo di un omomorfismo è un ideale, ed è facile definire un'algebra quoziente modulo un ideale I (pongasi $x \equiv y$ se $x(-y)+(-x)y \in I$) e dimostrare il corrispondente teorema di omomorfismo

Esercizio 0.4 Considerando l'algebra di Boole B come un anello (cfr. Oss. 0.2), si dimostri che la nozione di ideale coincide con quella di ideale proprio e quella di omomorfismo con omomorfismo unitario. Anche le nozioni di ideale primo (massimale) (vedi sotto) si riducono alle consuete (si osservi che in tal caso è ovvio che primo equivale a massimale in quanto l'unico dominio d'integrità verificante (*) dell'oss. 2 è $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$)

Definizione 0.5 Un ideale I si dice primo (risp. un filtro F si dice ultrafiltro)

se e solo se verifica una delle seguenti condizioni equivalenti

(a) I (risp. F) è massimale (rispetto alla $\subseteq$)

(b) $x \in I \iff -x \notin I$ (risp. $x \in F \iff -x \notin F$)

La dimostrazione dell'equivalenza di (a) e (b) è immediata dalle definizioni; si osservi piuttosto che vale il seguente risultato

(c) I ideale primo $\iff B \setminus I$ ultrafiltro

Un'applicazione standard del lemma di Zorn (ovvero, in base all'Oss. 0.2, 0.4, ~~[illegible]~~ del corrispondente teorema per gli anelli con identità) dimostra la validità del seguente classico Teorema:

<u>Teorema 0.1</u>: <u>Ogni ideale I di un'algebra di Boole B è contenuto in un</u>
<u>ideale primo</u>.

(risp. <u>ogni filtro è contenuto in un ultrafiltro</u>)

Si potrebbe osservare che il Teo 0.1 è meno forte dell'assioma della scelta, ma non è dimostrabile senza di esso. In realtà molti teoremi ~~di~~ in varie branche della matematica sono dimostrabili assumendo anche solo il Teo 0.1. Ad es.

(i) Compattificazione di Stone-Čech
(ii) Teorema di Hahn-Banach
(iii) Completezza del calcolo dei predicati del 1° ordine
(iv) Compattezza del calcolo dei predicati del 1° ordine

Useremo ora il teorema precedente per dimostrare quanto preannunciato all'Oss. 0.1:

<u>Teorema 0.2</u> (Teo. di rappresentazione di Stone). <u>Ogni algebra di Boole è isomorfa</u>

<u>ad un campo d'insiemi</u>.

<u>Dim</u>: Sia B un'algebra di Boole; pongasi $\mathcal{S}(B)=\{F \mid F \text{ ultrafiltro su } B\}$
per $x\in B$ pongasi $\mathcal{F}_x=\{F\in\mathcal{S}(B) \mid x\in F\}$,
$\mathcal{B}=\{\mathcal{F}_x \mid x\in B\}$, $f: B\longrightarrow\mathcal{B}$ $f(x)=\mathcal{F}_x$.
Si vede immediatamente che $f(1)=\mathcal{S}$ ed $f(0)=\emptyset$ e che
$f(x\cdot y)=f(x)\cap f(y)$, $f(x+y)=f(x)\cup f(y)$; inoltre
$f(-x)=\mathcal{B}\setminus f(x)$. Pertanto f è un omomorfismo su tutto
$\mathcal{B}$ (che è quindi campo d'insiemi); d'altra parte il Teo 0.1
implica $\ker f=0$, da cui segue la tesi

QED

Osservazione 0.5 : Il teorema 0.2 ha un'interpretazione topologica assai interessante:

$\{\mathcal{I}_x \mid x \in B\}$ è base di una topologia su $\mathcal{S}(B)$ (che munito di tale topologia si chiama spazio di Stone dell'algebra B)

E' possibile allora dimostrare (in modo non del tutto banale):

(0.5.1) $\mathcal{S}(B)$ è uno spazio di Hausdorff compatto

(0.5.2) $\mathcal{B}$ è il campo degli insiemi aperti e chiusi in $\mathcal{S}(B)$

(0.5.3) Ogni algebra di Boole è isomorfa al campo degli insiemi aperti e chiusi del suo spazio di Stone.

Poniamo qui due esercizi che esprimono la categoricità delle algebre di Boole sotto opportune condizioni

Esercizio 0.5 : Si dice atomo di B un elemento minimale in $B-\{0\}$. B si dice senz'atomi se priva di atomi, si dice invece atomica se $\forall x \in B$ esiste un atomo $\leq x$.

~~(0.5.4) Ogni algebra di Boole finita è atomica ed isomorfa all'insieme delle parti dei suoi atomi~~

(0.5.4) Sia B un'algebra di Boole atomica, $A=\{x \mid x \text{ atomo di } B\}$
$f: B \to \mathcal{P}(A)$ definita da $f(x)=\{a\in A \mid a\leq x\}$
è un isomorfismo fra B ed un campo d'insiemi $\hat{f}(B)=\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(A)$

(0.5.5) Ogni algebra di Boole finita è atomica e pertanto isomorfa all'algebra $\mathcal{P}(A)$ di tutte le parti dei suoi atomi.
In particolare la sua cardinalità è 2^n se $n=|A|$.

(0.5.6) Vi è una sola algebra di Boole senz'atomi e numerabile (a meno d'isomorfismi). Si osservi che, come anello, una tale algebra è isomorfa ad $\mathbb{F}_2[X_1,\dots,X_n,\dots]/(X_1^2-X_1,\dots,X_n^2-X_n,\dots)$.

<u>Definizione</u> 0.6. Un'algebra di Boole B si dice <u>completa</u> se ogni sottoinsieme $E\subseteq B$ ammette in B estremo superiore ed inferiore (che si notano $\sup E$, $\inf E$ ovvero $\Sigma E, \Pi E$ ovvero $\sum_{x\in E} x, \prod_{x\in E} x$).

Un <u>ideale</u> I di B (risp. un <u>filtro</u> F) si dice <u>completo</u> se per ogni $E\subseteq I$ (risp. $E\subseteq F$) si ha $\Sigma E\in I$ (risp. $\Pi E\in F$).

Un <u>omomorfismo</u> $f: B\to C$ fra algebre di Boole complete si dice <u>completo</u> se $\forall E\subseteq B$ si ha $f(\Sigma E)=\sum_{x\in E} f(x)$.

Analoghe definizioni, se μ è un cardinale finito, si danno per la μ-<u>completezza</u>, limitandosi a sottinsiemi $E\subseteq B$ di cardinalità $|E|<\mu$, o anche per la $\mathcal{D}$-completezza ove $\mathcal{D}$ è un qualunque sottinsieme di $\mathcal{P}(B)$.

La $\aleph_1$-completezza si chiama anche σ-<u>completezza</u>.

<u>Osservazione</u> 0.6. Una sottoalgebra A di un'algebra di Boole completa B

può essere completa, ma può darsi che, per $E \subseteq A$, $\sup E$ in A differisca da $\sup E$ in B; quando ciò non avviene si dice che A è <u>sottoalgebra completa</u> di B.

A titolo di esercizio si dimostri che in un'algebra di Boole <u>completa</u> B valgono le seguenti generalizzazioni delle proprietà di cui alla def 0.1

(iii)' $\forall x \in B \; \forall Y \subseteq B$ $\quad x \cdot \sum Y = \sum_{y \in Y} x \cdot y$

$\quad x + \prod Y = \prod_{y \in Y} (x + y)$ (<u>distributività</u>)

(viii)' $\forall X \subseteq B$ $\quad -\sum X = \prod_{x \in X} (-x)$

$\quad -\prod X = \sum_{x \in X} (-x)$ (<u>De Morgan</u>)

oltre alle ovvie generalizzazioni dell'associatività e della commutatività.

Si osservi anche che per verificare la completezza di B è sufficiente dimostrare che $\forall X \subseteq B$ esiste $\sup X$, in quanto allora si ha

$\inf X = \sup \{ y \in B \mid y \leq x \;\; \forall x \in X \}$ (o viceversa basta l'esistenza di $\inf X$).

Si osservi infine che il nucleo di un omomorfismo completo (risp. μ-completo) è un ideale completo (risp. μ-completo) e viceversa se I è un ideale completo dell'algebra completa B, anche B/I è completa e la proiezione canonica è un omomorfismo completo (e analogamente per μ-compl.)

Esercizio 0.6.1. L'algebra $\mathcal{P}(X)$ è completa, e viceversa un'algebra di Boole completa e atomica è isomorfa a $\mathcal{P}(X)$ per un X opportuno se e solo se verifica la distributività (iii)'

0.6.2. Si dimostri che in ogni algebra di Boole completa vale la legge distrib.

$$\text{(iii)}'' \quad \sum X \cdot \sum Y = \sum_{(x,y)\in X\times Y} x\cdot y$$

$$\prod X + \prod Y = \prod_{(x,y)\in X\times Y} (x+y)$$

Ma in generale non vale la più forte legge distributiva

$$\text{(iii)}''' \quad \prod_{i\in I} \sum X_i = \sum_{\xi\in \times_{i\in I} X_i} \prod_{i\in I} \xi_i$$

che è comunque valida nell'algebra $\mathcal{P}(X)$.

0.6.3. Si dimostri che l'algebra di Boole degli aperti regolari di uno spazio topologico X (vedi Eserc. 0.2) è un'algebra di Boole completa.
Viceversa si dimostri che ogni algebra di Boole completa è completamente isomorfa all'algebra degli aperti regolari del proprio spazio di Stone (vedi osservazione 0.5).

La possibilità di immergere ogni algebra di Boole in una completa, ed anzi, l'esistenza e l'unicità del "completamento di ogni algebra di Boole, è conseguenza del teorema seguente, cui premettiamo due definizioni concernenti insiemi semiordinati qualsiasi:

Definizione 0.7 Un sottinsieme D dell'algebra di Boole B si dice denso in B se per ogni $b \neq 0$, $b \in B$ esiste $d \in D$, $d \neq 0$, $d \leq b$.

Definizione 0.8 Un insieme semiordinato P si dice separativo se dati $p, q \in P$ si ha necessariamente $p \leq q$ se ogni $r \leq p$ è compatibile con q (ossia $\forall r \leq p \; \exists s \leq r, s \leq q$).

Osservazione 0.8 : Ogni sottinsieme denso di un'algebra di Boole è necessariamente separativo per l'ordinamento indotto

Esercizio 0.8 : Si dimostri che per ogni insieme parzialmente ordinato P vi è un'unica applicazione surgettiva ed ordinata $\pi : P \longrightarrow Q$ tale che Q sia separativo e p sia compatibile con q in P se e solo se $\pi(p)$ è compatibile con $\pi(q)$ in Q.
[sugg: si consideri su P la relazione $p \sim q$ se gli elementi compatibili con q sono gli stessi compatibili con p ; sull'insieme quoziente si metta la relazione di semiordine che rende valida la separatività]

Siamo allora in grado di enunciare il teorema d'immersione (o di completamento)

Teorema 0.3. Sia P un insieme semiordinato. Esiste un'algebra di Boole $\widehat{P} = B$ completa ed un'applicazione $j : P \longrightarrow B - \{0\}$ tale che

(i) $p \leq q$ implica $j(p) \leq j(q)$

(ii) p compatibile con q se e solo se $j(p) \cdot j(q) \neq 0$

(iii) $j(P)$ è denso in B

Inoltre l'algebra B è unicamente determinata a meno di isomorfismi completi che rispettano l'applicazione naturale j, e si dirà il completamento di P.
Infine j è iniettiva (e quindi P può essere identificato con un sottinsieme di B) se e solo se P è separativo.

Dimostr.: Si definisca, per $E \subseteq P$, $E^{\perp} = \{x \in P \mid x$ è incompatibile con tutti gli $y \in E\}$
Si consideri poi $B = \{E \subseteq P \mid E^{\perp\perp} = E\}$ e si ponga $j(p) = \{p\}^{\perp\perp}$

E' immediato che dalle relazioni $E \subseteq F \Rightarrow E^{\perp} \supseteq F^{\perp} \Rightarrow E^{\perp\perp} \subseteq F^{\perp\perp}$
$E^{\perp\perp} \supseteq E$

segue $E^{\perp\perp\perp} = E^{\perp}$ e quindi B diviene un'algebra di Boole con le seguenti definizioni:

$E \cdot F = E \cap F \qquad E + F = (E \cup F)^{\perp\perp} \qquad -E = E^{\perp} \qquad 0 = \emptyset \qquad 1 = P$

Inoltre si ha $E \leq F$ se e solo se $E \subseteq F$, e B è completa in quanto
$\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} E_i$

L'applicazione $j : P \to B$ verifica ovviamente la (i) perché $p \leq q \Rightarrow \{p\}^{\perp} \supseteq \{q\}^{\perp}$ e la (ii) perché $r \leq p, q \Leftrightarrow \{r\}^{\perp\perp} \subseteq \{p\}^{\perp\perp} \cap \{q\}^{\perp\perp}$ e la (iii) banalmente.
Inoltre la definizione stessa di j è tale da risultare iniettiva se e solo se P è separativo.
Infine l'unicità di B segue dal fatto che $j(P)$ essendo denso è separativo, e quindi univocamente determinato (vedi esercizio 0.8) insieme a j a meno d'isomorfismi, e d'altra parte $\forall b \in B$ si ha $b = \sum \{ j(p) \mid p \in P, j(p) \leq b\}$:
è quindi evidente come definire un isomorfismo completo che rispetta j.

Q.E.D.

Corollario 0.3.1 *Ogni algebra di Boole B possiede un completamento $\hat{B}$ unico a meno d'isomorfismi (completi che inducono su B l'identità).*

Della teoria delle algebre di Boole complete utilizzeremo ancora qualche elemento, che andiamo ad esporre.

Definizione 0.9 Un'algebra di Boole B si dice *μ-saturata* (μ cardinale) se non esiste un sottinsieme $W \subseteq B$ di elementi a 2 a 2 disgiunti, di cardinalità μ. (Volendo ci si può limitare alle partizioni di B, cioè a sottinsiemi disgiunti massimali).
Si dice *saturazione di B*, e si nota sat B, il minimo μ tale che B sia μ-saturata.

Osservazione 0.9 Si dice spesso che B verifica la condizione della μ-catena se è μ-saturata: in effetti è facile vedere che B è μ-saturata se e solo se non esistono in B catene discendenti di tipo d'ordine μ (tale equivalenza sussiste peraltro solo se B è completa).
In generale un insieme semiordinato P si dice μ-saturato se non esiste un sottinsieme $W \subseteq P$ di elementi a 2 a 2 incompatibili, di cardinalità μ; è immediato constatare che P è μ-saturato se e solo se il suo completamento $B = \hat{P}$ lo è, e pertanto sat P = sat $\hat{P}$.

Lemma 0.1 *Se B è un'algebra di Boole completa e infinita, sat B è un cardinale regolare non numerabile*

<u>Dim</u>: Sia $\mu = \operatorname{sat} B$. Anzitutto μ è un cardinale $> \aleph_0$ poiché B è infinita e quindi, data una ~~partizione~~ insieme disgiunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ e preso $x \in B$ non appartenente alla sottoalgebra generata da $\{x_1, \dots, x_n\}$ si può porre $x_{n+1} = x \cdot (-\sum_{i=1}^{n} x_i)$, costruendo così un ~~partizione~~ insieme disgiunto numerabile.
Si supponga allora per assurdo che μ sia singolare, e sia $\operatorname{cof} \mu = \nu < \mu$.
Se $a \in B$, l'insieme $B_a = \{x \in B \mid x \leq a\}$ è un ~~sottoalgebra~~ ideale che possiede una ovvia struttura di algebra; si dirà che a è stabile in B se $\operatorname{sat} B_a = \operatorname{sat} B_x$ $\forall x \in B_a - \{0\}$.
Gli elementi stabili in B formano un sottoinsieme denso in B (in quanto altrimenti si avrebbe una successione $a_0 \geq a_1 > \dots > a_n > \dots$ tale che $\operatorname{sat}(B_{a_0}) > \operatorname{sat}(B_{a_1}) > \dots > \operatorname{sat} B_{a_n} > \dots$, assurdo).
Sia allora W un sottoinsieme massimale disgiunto di elementi stabili: ovviamente $|W| \leq \mu$.
Data un cardinale regolare $\lambda < \mu$ t.c. $\lambda > |W|$ si considere una qualunque partizione V di B di cardinalità λ: è chiaro che deve esistere un $w \in W$ che è partito da V in almeno λ parti (i.e. $|\{wv \mid v \in W\}| = \lambda$) e pertanto $\operatorname{sat} B_w \geq \lambda$; ma allora si ha $\sup\{\operatorname{sat} B_w \mid w \in W\} = \mu$.
Se ora $\exists w \in W$ t.c. $\operatorname{sat} B_w = \mu$, poiché $\nu < \mu$ vi è una partizione di B_w di cardin. ν: sia essa $U = \{w_\alpha \mid \alpha < \nu\}$; sia poi $\{\mu_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ una successione crescente di limite μ; sia infine U_α una partizione di B_{w_α} di cardinalità μ_α (esistente perché $\operatorname{sat} B_{w_\alpha} = \operatorname{sat} B_w > \mu_\alpha$).
Ora $\bigcup_{\alpha < \nu} U_\alpha$ è ovviamente una partizione di B_w di cardinalità μ, assurdo.
Supposto allora che $\forall w \in W$ $\operatorname{sat} B_w < \mu$, e scelti μ_α come sopra si determinino per induzione su α elementi $w_\alpha \in W$ tali che $w_\alpha \neq w_\beta$ $\forall \beta < \alpha$ ed esista una partizione U_α di B_{w_α} di cardinalità μ_α (ovviamente per $\alpha < \nu$). Ora $\bigcup_{\alpha < \nu} U_\alpha$ risulta un sottoinsieme disgiunto di B di cardinalità μ, assurdo.

Q.E.D

Gli esercizi seguenti potranno risultare utili nelle applicazioni alle nozioni di forcing:

<u>Esercizio</u> 0.9 Sia P un insieme semiordinato e sia $B = \widehat{P}$: per ogni $b \in B$ esiste un sottoinsieme $W \subseteq P$ di elementi incompatibili t.c. $b = \sum_{w \in W} j(w)$. Di conseguenza si ha $|B| \leq |P|^{<\mu}$ se $\mu = \operatorname{sat} P$ ($= \operatorname{sat} B$).

<u>Esercizio</u> 0.10 Sia B un'algebra di Boole μ-completa e μ-saturata. Allora B è completa
[Si dimostri anzitutto che se $E \subseteq B$ e $\forall x \in B$ $x \leq y \in E \Rightarrow x \in E$, allora $\sum E = \sum W$ ove W è un sottoinsieme disgiunto massimale di E]

Esercizio 0.11 Sia B un'algebra di Boole infinita e completa. Allora $|B| = |B|^{\aleph_0}$.
[Si dimostri che $D = \{a \in B \mid |B_x| = |B_a| \ \forall x \leq a\}$ è denso in B e che, per $a \in B$, $|B_a|^{\aleph_0} = |B_a|$ (a meno che $|B_a| = 2$); si consideri un sottinsieme $W \subseteq B$ disgiunto massimale e si dimostri che $|B| = \prod_{w \in W} |B_w|$]

Riprendiamo per concludere il concetto di distributività (vedi Eserc. 0.6), anch'esso utile nel seguito.

Definizione 0.10 Sia B un'algebra di Boole completa. B si dice μ-distributiva (μ cardinale)

se, comunque scelti elementi $b_{\alpha,i} \in B$ ($\alpha \in \mu$, $i \in I_\alpha$) si ha

$$(0.10) \quad \prod_{\alpha<\mu} \sum_{i \in I_\alpha} b_{\alpha,i} = \sum_{p \in \mathsf{X}_{\alpha\in\mu} I_\alpha} \prod_{\alpha<\mu} b_{\alpha,p(\alpha)}$$

Ricordando che un sottinsieme $D \subseteq B$ è aperto se $x \in B, d \in D, x \leq d \Rightarrow x \in D$, e che data una partizione W di B un raffinamento V di W è una partizione di B tale che $\forall w \in W \ \exists v \in V \ v \leq w$ (e W è una partizione se è disgiunto e $\sum W = 1$) si può caratterizzare la μ-distributività nel modo seguente

Lemma 0.2 Sia B un'algebra di Boole completa. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(i) B è μ-distributiva

(ii) $D_\alpha \subseteq B$, D_α aperto e denso in B $(\alpha<\mu) \Longrightarrow \bigcap_{\alpha<\mu} D_\alpha$ aperto e denso in B

(iii) W_α partizione di B $(\alpha<\mu) \Rightarrow \exists W$ partizione di B che è un raffinamento di W_α per ogni $\alpha<\mu$.

<u>Dim</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) $D = \bigcap D_\alpha$ è ovviamente aperto. Dato $0 \neq b \in B$ sia $\{b_{\alpha i} \mid i \in I_\alpha\}$ un'indicizzazione dell'insieme $\{bd \mid d \in D_\alpha\}$. Si ha allora $\sum_{i\in I_\alpha} b_{\alpha i} = b \ \forall \alpha < \mu$. Pertanto $b = \sum_{p \in \times I_\alpha} \prod_{\alpha<\mu} b_{\alpha,p(\alpha)}$ e pertanto qualche prodotto è non nullo: ma allora appartiene a D, e quindi D è denso in B.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Date le partizioni W_α, si ponga $D_\alpha = \{x \in B \mid \exists y \in W_\alpha \ x \le y\}$: chiaramente D_α è aperto e denso, e pertanto tale è $D = \bigcap D_\alpha$. Se W è un sottoinsieme incompatibile massimale di D, esso è un raffinamento di ogni W_α.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Dati gli elementi $b_{\alpha i}$ $\alpha<\mu$, $i \in I_\alpha$ si osservi anzitutto che se $p \in \times_{\alpha<\mu} I_\alpha$ si ha $b_p = \prod_{\alpha<\mu} b_{\alpha,p(\alpha)} \le \sum_{i\in I_\alpha} b_{\alpha,i}$ da cui $\sum_p b_p \le \sum_i b_{\alpha,i}$ e quindi nella (0.10) vale il $\le$ senza alcuna ipotesi.

Viceversa supponiamo $\prod_\alpha \sum_i b_{\alpha i} = 1$ e si rimpiazzino i $b_{\alpha i}$ con dei $w_{\alpha i}$ a due a due disgiunti (eventualmente nulli) in modo che $w_{\alpha i} \le b_{\alpha i}$ e $\sum_i w_{\alpha i} = \sum_i b_{\alpha i}$ $\forall \alpha<\mu$; chiaramente $W_\alpha = \{w_{\alpha i} \mid i\in I_\alpha\}$ è una partizione di B. Sia allora W un raffinamento comune dei W_α: per ogni $w\in W$ esiste $p \in \prod_\alpha I_\alpha$ t.c. $w \le \prod_\alpha w_{\alpha,p(\alpha)}$; allora $1 = \sum w \le \sum_p \prod_\alpha w_{\alpha,p(\alpha)} \le \sum_p \prod_\alpha b_{\alpha,p(\alpha)}$, che è l'altra metà della (0.10).

La supposizione che $\prod_\alpha \sum_i b_{\alpha i} = 1$ non è restrittiva: basta passare all'ideale ~~sottoalgebra~~ di B formato dagli elementi $\le \prod \sum_i b_{\alpha i}$, con l'ovvia struttura di algebra indotta da B.

QED

<u>Osservazione</u> 0.10 La (ii) del <u>lemma</u> 0.2 può essere assunta come definizione di μ-distributività per un insieme semiordinato P. In tal caso è immediato verificare che P è μ-distributivo se e solo se $B = \hat{P}$ lo è.

<u>Esercizio</u> 0.12 Un insieme semiordinato P si dice <u>μ-chiuso</u> se data una μ-successione decrescente $\{p_\alpha \mid \alpha<\mu, \alpha<\beta \Rightarrow p_\alpha \ge p_\beta\}$ esiste $p\in P$, $p \le p_\alpha$ $\forall\alpha<\mu$. Si dimostri che la μ-chiusura è condizione sufficiente per la μ-distributività. [Data una famiglia di aperti densi D_α ($\alpha<\mu$), si definisca una successione p_α in modo che $p_\alpha \le p_\beta$ $\forall \beta<\alpha$ e $p_\alpha \in D_\alpha$.]