§1 - Nozione di forcing

__Definizione 1__ - Dicesi __nozione di forcing__ un insieme semiordinato $(P, <)$ - Gli elementi di P si dicono __condizioni di forcing__ e se $p, q \in P$ si dice che p è __più forte__ di q se $p < q$.

$p, q \in P$ si dicono __compatibili__ se esiste $r \in P$ t.c. $r \leq p$, $r \leq q$.

Un insieme $W \subseteq P$ si dice __incompatibile__ se i suoi elementi sono __a__ 2 __a__ 2 incompatibili. Un insieme $D \subseteq P$ si dice __denso in__ P se per ogni $p \in P$ esiste $d \in D$ tale che $d \leq p$, si dice __denso sotto__ $p \in P$ se è denso in $Q = \{q \in P \mid q \leq p\}$

Un sottinsieme $G \subseteq P$ si dice $\mathcal{D}$-__generico su__ P se soddisfa

(1.1) $G \neq \emptyset$

(1.2) $q \in G,\ p \in P,\ p \geqslant q \implies p \in G$

(1.3) $p, q \in G \implies \exists r \in G$ t.c. $r \leq p$, $r \leq q$

(Un insieme che verifica (1.1) - (1.3) si dice __filtro su__ P)

(1.4) $G \cap D \neq \emptyset$ per ogni $D \in \mathcal{D}$ che sia denso in P.

__Osservazione__: Se $\mathcal{D} \supseteq \operatorname{def} P$ (In particolare se $\mathcal{D} \models ZF$ e $\mathcal{D} \ni P$), nella definizione di insieme $\mathcal{D}$-generico su P (1.3) si può indebolire nel modo seguente

(1.3)' $p, q \in G \implies p, q$ compatibili

Nelle medesime ipotesi,

Nella definizione di insieme $\mathcal{D}$-generico si può rimpiazzare la (1.4) con una delle seguenti condizioni equivalenti:

(1.4)' $\overset{\forall p\in P}{(}G\cap D\neq\emptyset$ per ogni $D\in\mathcal{D}$ denso sotto $p\in P$

(1.4)'' $G\cap D\neq\emptyset$ per ogni $D\in\mathcal{D}$ denso in P e aperto in P
(ove aperto significa $d\in D$ e $p\leq d\Rightarrow p\in D$)

(1.4)''' $G\cap D\neq\emptyset$ per ogni $D\in\mathcal{D}$ copertura di P
(i.e. ogni $p\in P$ è compatibile con un $d\in D$)

(1.4)^{IV} $G\cap D\neq\emptyset$ per ogni $D\in\mathcal{D}$ copertura incompatibile di P.

Lemma 1: Se ~~[illegible]~~ i sottinsiemi densi di P appartenenti a $\mathcal{D}$ sono al più $\aleph_0$, allora per ogni $p\in P$ esiste un insieme $\mathcal{D}$-generico su P che contiene p.

Dim: Sia $D_1, D_2 \ldots$ un'enumerazione dei sottinsiemi densi di P apparten. a $\mathcal{D}$, e si definisca una successione p_n ponendo $p_0=p$, p_{n+1} un elemento di D_{n+1} t.c. $p_{n+1}\leq p_n$ - Si vede allora che un insieme del tipo voluto è
$G=\{p\in P \mid \exists n\in\omega\ p_n\leq p\}$ -

Anticipazione: Il caso che interesserà particolarmente è quello in cui si parte da un modello transitivo $\mathfrak{M}$ di ZFC e si considera una nozione di forcing $(P,<)$ in $\mathfrak{M}$, per la quale si ~~desidera~~ poca avere un insieme G $\mathfrak{M}$-generico. Allora si dimostrerà che esiste un modello transitivo $\mathfrak{M}[G]$ verificante
(i) $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}[G]$, $G\in\mathfrak{M}[G]$
(ii) $\mathfrak{M}[G]\models ZFC$
(iii) Se $\mathfrak{N}$ è transitivo e verifica (i),(ii) allora $\mathfrak{N}\supseteq\mathfrak{M}[G]$
(iv) $\mathfrak{M}$ ed $\mathfrak{M}[G]$ hanno gli stessi ordinali.

E' facile allora aggiungere ad un dato modello un nuovo numero reale: sia $P = \bigcup_{n\in\omega} {}^n 2$ ordinato per inclusione inversa ($p \leq q \iff p \supseteq q$).
Allora se G è generico (su $\mathcal{M}$) si vede che $f = \bigcup G \in {}^\omega 2$ (in effetti (1.3) dà la ~~[illegible]~~ funzionalità e (1.4) per $D_n = \{p \in P \mid n \in \operatorname{dom} p\}$ garantisce che $\operatorname{dom} f = \omega$). Ora f è la funzione caratteristica di un sottoinsieme x di ω che non è in $\mathcal{M}$, in quanto $f \notin M$ (sia $g \in {}^\omega 2$, $g \in M$; posto $D_g = \{p \in P \mid p \not\subseteq g\}$ si verifica che D_g è denso in P e quindi $g \neq f$); un tale x si dice un reale generico di Cohen.
Volendo allora aggiungere al modello $\mathcal{M}$ molti reali generici per falsificare l'ipotesi del continuo si potrebbe procedere come segue:

$P = \{p \in M \mid p$ funz., $\operatorname{dom} p \in \mathcal{P}_\omega(\omega_2 \times \omega)$, $\operatorname{Im} p \subseteq 2\}$ semi-ordinato per $\supseteq$

Sia G generico su $\mathcal{M}$ in P e pongasi $f = \bigcup G$.
f è una funzione per (1.3) e $\operatorname{dom} f = \omega_2^{\mathcal{M}} \times \omega$ (in quanto vale (1.4) per $D_{(\alpha,n)} = \{ ~~[illegible]~~ \; p \in P \mid (\alpha, n) \in \operatorname{dom} p\}$)
Sia allora $x_\alpha \subseteq \omega$ di funzione caratteristica $n \mapsto f(\alpha, n) = \chi_\alpha(n)$.
Di nuovo $\chi_\alpha \notin M$ perché $D_{\alpha,g} = \{p \in P \mid \exists n \; g(n) \neq p(\alpha, n)\}$ è denso in P per ogni α; inoltre se $\alpha \neq \beta$ $x_\alpha \neq x_\beta$ perché
$D_{\alpha,\beta} = \{p \in P \mid ~~[illegible]~~ \; \exists n \, (p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}$ è denso in P.
Pertanto in $\mathcal{M}[G]$ $2^{\aleph_0} \geq \omega_2^{\mathcal{M}}$
Questo naturalmente non vuol dir nulla se non si ha che $\omega_2^{\mathcal{M}} = \omega_2^{\mathcal{M}[G]}$; questo si fa ~~[illegible]~~ una volta che si è visto che il modello $\mathcal{M}[G]$ si può descrivere totalmente nel modello base $\mathcal{M}$ utilizzando il linguaggio del forcing, che contiene nomi per ogni elemento di $\mathcal{M}$ e un nome canonico per l'insieme generico, e definendo la relazione di forcing $\Vdash$ fra condizioni di forcing e sentenze del linguaggio di forcing. (p forza σ si noterà $p \Vdash \sigma$)
Il teorema fondamentale del forcing dice allora che se σ è una sentenza del linguaggio del forcing e G è generico su $\mathcal{M}$ in P

(*) $\mathcal{M}[G] \models \sigma$ se e solo se $\exists p \in G$ t.c. $p \Vdash \sigma$

Se, per esempio, per P vale la tesi del <u>Lemma</u> 1, si può definire la relazione di forcing ponendo

(*) $p \Vdash \sigma \underset{Df}{\iff} \forall G$ generico $\ni p$ $\mathfrak{M}[G] \models \sigma$

Si dimostrino allora, a titolo di esercizio, le seguenti asserzioni

(a) $p \Vdash \sigma,\ q \leq p \implies q \Vdash \sigma$

(b) $p \Vdash \sigma \implies$ non $p \Vdash \sim\sigma$

(c) $\forall p\, \exists q \leq p$ t.c. $q \Vdash \sigma$ ovvero $q \Vdash \sim\sigma$ (usare (*))

(d) $p \Vdash \sigma \wedge \tau \iff p \Vdash \sigma$ e $p \Vdash \tau$

(e) $p \Vdash \sigma \to \tau \iff (\forall q \leq p)$ se $q \Vdash \sigma$ allora $q \Vdash \tau$

(f) $p \Vdash \sigma \vee \tau \iff (\forall q \leq p)\, \exists r \leq q$ t.c. $r \Vdash \sigma$ ovvero $r \Vdash \tau$

(g) $p \Vdash \forall x\, \varphi(x) \iff p \Vdash \varphi(a)$ per ogni costante a del ling. del forcing

(h) $p \Vdash \exists x\, \varphi(x) \iff \forall q \leq p\, \exists r \leq q$ t.c. $r \Vdash \varphi(a)$ per un'opportuna costante a del linguaggio del forcing

Naturalmente, oltre alle difficoltà connesse al fatto di definire $\Vdash$ <u>entro</u> $\mathfrak{M}$ (cosa non possibile utilizzando (*)), vi è il problema dell'<u>esistenza</u> di insiemi generici (ad esempio ciò è ovviamente vero se $\mathfrak{M}$ è numerabile, ma ovviamente falso se $\mathfrak{M} = \mathcal{V}$).