6. I costruibili di Gödel

Defin. Si dice che X è definibile su A (o a parametri in A) se esistono una formula $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ ed elementi $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che sia

$$X = \{t \in A \mid A \models \varphi[t, a_1, \dots, a_n]\}.$$

Oss: $\mathrm{Def}(A) = \{x \mid x \text{ è definibile su } A\}$ è Δ_1^{ZF} (per Lemma (ii) di p. I)

Lemma: (i) Per ogni x si ha $x \in \mathrm{Def}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$

(ii) x transitivo $\Longrightarrow$ $\mathrm{Def}(x)$ transitivo (e quindi $x \subseteq \mathrm{Def}(x)$)

Def: Si definisce induttivamente la classe L degli insiemi costruibili (di Gödel) ponendo:

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}\, L_\alpha$$

$$L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ limite}$$

$$L = \bigcup_{\alpha \text{ ord}} L_\alpha$$

Oss: $x = L_\alpha$, $x \in L_\alpha$ sono formule Δ_1^{ZF}; $x \in L$ (i.e. $\exists\alpha(x \in L_\alpha)$) è Σ_1^{ZF}

Proposizione: (i) $\forall\alpha$ L_α è transitivo (e quindi L è transitiva)

(ii) $\alpha < \beta \Longrightarrow L_\alpha \in L_\beta$

(iii) $\forall\alpha$ $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ e $\forall n < \omega$ $L_n = V_n$ (da cui $L_\omega = V_\omega$)

(iv) $\forall\alpha$ $\alpha \subseteq L_\alpha$ e $\alpha \in L_{\alpha+1}$ (quindi $L \supseteq \mathrm{Ord}$ ed è una classe propria)

<u>Def.</u> Si definisce l'<u>ordine costruibile</u> $\delta(x)$ di un insieme costruibile $x \in L$ ponendo

$$\delta(x) = \min\{\alpha \mid x \in L_\alpha\}$$

<u>Lemma</u>: (i) $\delta(x)$ è un ordinale successore

(ii) $x \in y \in L \Longrightarrow \delta(x) < \delta(y)$

(iii) $\forall x \in L \quad \rho(x) < \delta(x)$

(iv) Per ogni <u>insieme</u> $x \subset L$ esiste α t.c. $x \subseteq L_\alpha$.

<u>Teorema 1</u> $L \models ZF$

<u>Osservazione</u>: Poichè $x \in L_\alpha$ è Δ_1^{ZF}, e quindi assoluta fra modelli transitivi di ZF

si ha per ogni modello transitivo M di ZF e per ogni $x \in M$

$$M \models x \in L \iff \exists \alpha \in M \text{ t.c. } x \in L_\alpha$$

Allora se M è una classe propria (ossia se contiene tutti gli ordinali)

si ha $M \supseteq L$ (ed $L = L^M$, ossia è la classe degli insiemi costruibili <u>in</u> M); pertanto L è contenuto in ogni modello di ZF che ha tutti gli ordinali, ed è quindi il <u>minimo</u> tale modello.

Inoltre $L = L^L$ e perciò L verifica il cosiddetto

<u>Assioma di costruibilità di Gödel</u>: $V = L$ (i.e. $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$)

Pertanto se ZF è coerente tale è anche $ZF + V = L$.

X

<u>Lemma</u> (Gödel): Esiste una formula Σ_1 con due variabili libere $\varphi(x,y)$ t.c.

(i) $\prec \; = \{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}$ è un buon ordinamento su L^2

(ii) $\varphi(x,y)$ è $\Delta_1^{ZF+V=L}$.

<u>Corollario</u> (Gödel): L è bene ordinato da $\prec$, e quindi $V=L$ implica una forma forte di AC (vi è una <u>funzione</u> <u>universale</u> <u>di scelta</u>).

Pertanto, se ZF è coerente, tale è anche ZFC.

<u>Lemma</u>: $\forall \alpha \geq \omega$ si ha $|L_\alpha| = |\alpha|$

<u>Lemma</u>: Se μ è un cardinale infinito si ha $H(\mu) \cap L = L_\mu$

<u>Lemma</u>: Se μ è un cardinale infinito si ha $\mathcal{P}(\mu) \cap L \subseteq L_{\mu^+}$

<u>Corollario</u> (Gödel): $V=L \Longrightarrow$ IGC (e quindi $L \models$ IGC).

Pertanto IGC è consistente relativamente a ZF.

<u>Esercizio</u>: Si considerino le seguenti "operazioni di Gödel":

$$G_1(x,y)=\{x,y\} \qquad G_2(x,y)=\in\!/_x \qquad G_3(x,y)=x\smallsetminus y$$

$$G_4(x,y)=x/_y \qquad G_5(x,y)=x\cap \mathrm{dom}(y) \qquad G_6(x,y)=x\cap y^{-1}$$

$$G_7(x,y)=\{(u,v,w)\in x \mid (v,w,u)\in y\} \qquad G_8(x,y)=\{(u,v,w)\in x \mid (u,w,v)\in y\}$$

Si beneordinino le triple (i,α,β) ove $0\le i\le 8$ prima secondo il loro max e, a parità, antilessicograficamente; si definiscano induttivamente gli insiemi L'_γ nel modo seguente:

(i) se la γ-esima tripla è (i,α,β) con $i\neq 0$, allora $L'_\gamma = G_i(L'_\alpha, L'_\beta)$

(ii) se la γ-esima tripla è $(0,\alpha,\beta)$, allora $L'_\gamma=\{L'_\delta \mid \delta<\gamma\}$.

Si dimostri che la classe $L'=\bigcup_{\gamma\,\mathrm{ord}} L'_\gamma$ è un modello transitivo di ZF contenente tutti gli ordinali e minimo fra tali modelli, e se ne deduca che $L'=L$.

In effetti si dimostri

(a) $L'_\omega = L_\omega = V_\omega$

(b) Se $\omega^\gamma=\gamma$, allora $L'_\gamma=L_\gamma$

[per la (b) vedi T. A. Linden: Equivalences between Gödel's definition of constructibility, in "Sets, Models and Recursion Theory" (J. Crossley, ed.) North Holland 1967]

<u>Osservazione</u>: Se si assume che ZF possiede un modello standard (condizione in sè <u>più forte</u> della coerenza di ZF) allora per l'isomorfismo di Mostowski possiede anche un modello transitivo M (ove M è un <u>insieme</u> transitivo) e il ragionamento dell'<u>oss.</u> di p. IX implica $L^M = L \cap M = L_\sigma$ ove $\sigma = \{\alpha \text{ ord.} \mid \alpha \in M\}$ (detto <u>indice</u> di M).
Vi è allora un <u>minimo</u> ordinale σ_0 t.c. $L_{\sigma_0} \models ZF$; tale L_{σ_0} è il <u>minimo</u> modello transitivo di ZF e verifica ovviamente anche AC, IGC e $V=L$.

Il modello minimo L_{σ_0} si può utilizzare per mostrare l'impossibilità di utilizzare il metodo dei <u>modelli</u> <u>interni</u> (ossia l'uso di classi transitive definite da formule del tipo di L) ~~...~~ per ottenere l'indipendenza di $V=L$ (e quindi a maggior ragione di AC o IGC).
Se infatti M è un modello transitivo di ZF e se si <u>dimostra</u> in ZF che vale ~~...~~ $(ZF)^M$, allora $M^{L_{\sigma_0}}$ definisce un sottinsieme transitivo di L_{σ_0} che a sua volta è modello di ZF e quindi coincide con L_{σ_0}.
Pertanto $L_{\sigma_0} \models V=L$ e $V=M$ (i.e. $\forall x (x \in M)$) e pertanto $V=L$ è consistente con $V=M$ e dunque non è provabile in ZF $(V \neq L)^M$, ed a maggior ragione $(\sim AC)^M$ ovvero $(\sim IGC)^M$.
Il ragionamento si applica a qualunque ~~...~~ modello <u>standard</u> interno di ZF, utilizzando l'isomorfismo di Mostowski.