§2 - Modelli Booleani

Sia B un'algebra di Boole completa.

Definizione 2: Una struttura Booleana (per il linguaggio della teoria degli insiemi), detta anche modello booleano (a valori in B) è una terna $\mathcal{U} = (U, I, E)$ ~~così~~ ove U è un insieme (talvolta una classe) ed I, E sono funzioni: $U^2 \to B$.

Si scriverà sempre $I(x,y) = \|x=y\|_B$, $E(x,y) = \|x \in y\|_B$ (e si tralascerà l'indice B se fissato dal contesto) e si assumerà che valgano le seguenti condizioni:

(2.1) $\|x=x\| = 1$

(2.2) $\|x=y\| = \|y=x\|$

(2.3) $\|x=y\| \cdot \|y=z\| \leq \|x=z\|$

(2.4) $\|x \in y\| \cdot \|v=x\| \cdot \|w=y\| \leq \|v \in w\|$

Si estende allora la definizione di $\| \; \|$ ponendo, per ogni formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni n-upla $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ $\|\varphi(a_1, \dots, a_n)\|$, come il valore definito da I ed E per le formule atomiche, e induttivamente dalle regole

(2.5) $\|\sim\varphi(a_1,\dots,a_n)\| = -\|\varphi(a_1,\dots,a_n)\|$

(2.6) $\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\|\cdot\|\psi\|$

(2.7) $\|\varphi\vee\psi\| = \|\varphi\|+\|\psi\|$

(2.8) $\|\varphi\rightarrow\psi\| = (-\|\varphi\|)+\|\psi\|$

(2.9) $\|\varphi\Leftrightarrow\psi\| = \|\varphi\|\cdot\|\psi\|$

ove si è sempre sottintesa la n-uple $(a_1,\dots,a_n)$ di elementi di U.

(2.10) $\|\exists x\,\varphi(x;a_1,\dots,a_n)\| = \sum_{u\in U}\|\varphi(u;a_1,\dots,a_n)\|$

(2.11) $\|\forall x\,\varphi(x;a_1,\dots,a_n)\| = \prod_{u\in U}\|\varphi(u;a_1,\dots,a_n)\|$

<u>Osservazione</u> 1. E' immediato constatare che la nozione di modello booleano generalizza quella di modello, e che la valutazione booleana di una formula φ per un certo assegnamento $a_1,\dots,a_n$ (ossia $\|\varphi(a_1,\dots,a_n)\|$) generalizza la nozione di soddisfazione in un modello (ossia $\mathfrak{M}\models\varphi(a_1,\dots,a_n)$). In effetti se B è l'algebra banale $2=\{0,1\}=\mathcal{P}(\{\phi\})$, e se $\mathcal{U}=(U,I,E)$ è un modello booleano, ad esso corrisponde un modello (nel senso consueto) $\mathfrak{M}=(M,R)$ ove $M=U/\approx$ e $a\approx b \underset{Df}{\Longleftrightarrow} \|a=b\|=1$ e $[a]R[b] \underset{Df}{\Longleftrightarrow} \|a\in b\|=1$. (E viceversa ogni modello ordinario si può vedere come modello booleano prendendo per $\|\sigma\|$ il valore di verità di σ in $\mathfrak{M}$).

<u>Osservazione</u> 2 Si dirà che $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ è <u>valida</u> in $\mathcal{U}$ se $\|\varphi(a_1,\dots,a_n)\|=1$.

E' immediato che $\varphi\rightarrow\psi$ risulta valida se e solo se $\|\varphi\|\leq\|\psi\|$ e pertanto

le (2.1)...(2.4) postulano la validità degli assiomi del predicato $=$. In particolare si ottiene $\|x=y\|\cdot\|\varphi(x)\|\leq\|\varphi(y)\|$ per ogni formula φ. In modo analogo si può vedere che <u>tutti</u> gli assiomi del calcolo dei pre=

dicati del 1° ordine sono validi*, e che le regole di deduzione portano sentenze valide in sentenze valide: pertanto ogni teorema del calcolo dei predicati ha valore 1, e se due formule sono (dimostrabilmente) equivalenti i loro valori sono uguali.

Definizione 3 - Un modello booleano $\mathcal{U}$ si dice *pieno* se per ogni formula

$\varphi(x; x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ esiste un $a \in U$

t.c. $\|\varphi(a; a_1, \dots, a_n)\| = \|\exists x\, \varphi(x; a_1, \dots, a_n)\| = \sum_{u \in U} \varphi(u; a_1, \dots, a_n)$

Si osservi che se B è finita ogni modello booleano è pieno.
Se F è un ultrafiltro su B si può definire un modello (ordinario) $\mathcal{U}/F = \mathcal{M} = (M, R)$

ponendo $M = U/\equiv_F$ ove $a \equiv_F b \iff \|x = y\| \in F$

$R = \{([a],[b]) \mid \|a \in b\| \in F\}$

(Naturalmente se U è una classe propria occorre definire $[a]$ utilizzando, ad es., il trucco di Scott)
E' facile vedere, come nell'osservazione 1, che $\mathcal{M}$ viene un modello (ordinario); in più, se $\mathcal{U}$ è pieno, vale la seguente generalizzazione dell'oss. 1

Lemma 2 Sia $\mathcal{U}$ un modello booleano pieno. Per ogni formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$ si ha

$$\mathcal{U}/F \models \varphi([a_1], \dots, [a_n]) \text{ se e solo se } \|\varphi(a_1, \dots, a_n)\| \in F.$$

<u>Dim</u>: Si procede per induzione sulla complessità di φ. Se φ è atomica la definizione stessa di $\mathcal{U}/_F$ dà la tesi.
D'altra parte, essendo F un ultrafiltro, le (2.5), (2.6) garantiscono che la tesi vale per $\sim\varphi$, $\varphi\wedge\psi$ se vale per φ e ψ.
Infine se $\varphi = \exists x\, \varphi(x; x_1, \dots, x_n)$ si scelga, ~~posseg~~ dato $(a_1, \dots, a_n) \in U^n$, un $a \in U$ in modo che $\|\varphi(a; a_1, \dots, a_n)\| = \|\exists x\, \varphi(x; a_1, \dots, a_n)\|$ (tale a esiste sempre per la pienezza di $\mathcal{U}$). Ma allora, evidentemente, si ha (poichè F è filtro) $\|\exists x\, \varphi(x; a_1, \dots, a_n)\| \in F \iff \|\varphi(a; a_1, \dots, a_n)\| \in F$ per qualche $a \in U$, da cui la tesi

QED

Vogliamo ora definire una generalizzazione del nostro modello base della teoria degli $\mathcal{V} = (V, \in)$ insiemi, in modo che gli assiomi di ZFC siano validi (in senso booleano).

<u>Definizione 4</u>. <u>Pongasi</u>

$$(4.1)\begin{cases} V_0^B = \emptyset \\ V_\lambda^B = \bigcup_{\gamma\in\lambda} V_\gamma^B & \text{per } \lambda \text{ limite} \\ V_{\alpha+1}^B = \{f \mid f : \mathrm{dom} f \to B \text{ e } \mathrm{dom} f \subseteq V_\alpha^B\} \end{cases}$$

<u>Si definisca il rango</u> $\rho^B(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}^B\}$.

<u>Si definiscano allora induttivamente i valori</u> $\|x\in y\|$, $\|x=y\|$ <u>mediante</u>

$$(4.2) \qquad \|x\in y\| = \sum_{t\in \mathrm{dom} y} \|x=t\|\cdot y(t)$$

$$(4.3) \qquad \|x\subseteq y\| = \prod_{t\in \mathrm{dom} x} \left[(-x(t)) + \|t\in y\|\right]$$

$$(4.4) \qquad \|x=y\| = \|x\subseteq y\|\cdot\|y\subseteq x\|$$

Procedendo per induzione sulle coppie $(\rho(x), \rho(y))$ ordinate ~~lessicograficamente~~ con l'ordinamento per quadrati si ottiene la definizione di $\|x\in y\|$, $\|x=y\|$ su tutto $V^B = \bigcup_{\alpha\ \mathrm{ord.}} V_\alpha^B$.
Definito ~~[illegible]~~ in tal modo l'universo booleano V^B e le funzioni booleane, si ha:

Teorema 1 V^B è un modello booleano pieno ed estensionale (i.e. tale che

$$(4.5) \qquad \| \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \| \leq \| x = y \| \quad).$$

Dim.: Occorre anzitutto verificare che valgano le (2.1) .... (2.4)
Per la (2.1) occorre provare $\| x \subseteq x \| = 1$, ed utilizzando l'operazione booleana $x \Rightarrow y = (-x) + y$ ciò equivale a provare $(x(t) \Rightarrow \| t \in x \|) = 1 \quad \forall t \in \mathrm{dom}\, x$
Ma procedendo per induzione si può supporre $\| t = t \| = 1 \quad \forall t \in \mathrm{dom}\, x$ e quindi per la (4.2) $\quad x(t) = \| t = t \| . x(t) \leq \| t \in x \|$ da cui la tesi.
La (2.2) è ovvia per la simmetria della (4.4). Allora la (2.4) segue dalle

$$(4.6) \qquad \| x \in y \| \, \| x = z \| \leq \| z \in y \|$$
$$\| y \in x \| \, \| x = z \| \leq \| y \in z \|$$

che si dimostreranno simultaneamente per induzione sulle triple $(\rho(x), \rho(y), \rho(z))$ ordinate lessicograficamente, insieme alla (2.3)

$$(2.3) \qquad \| x = y \| \, \| y = z \| \leq \| x = z \|$$

La (2.3) a sua volta segue se si prova

$$(4.7) \qquad \| x \subseteq y \| \cdot \| y = z \| \leq \| x \subseteq z \|$$

Per la (4.3) occorre allora dimostrare, per qualsiasi $t \in \mathrm{dom}\, x$

$$\| y = z \| \cdot (x(t) \Rightarrow \| t \in y \|) \leq (x(t) \Rightarrow \| t \in z \|)$$

Ma si ha, per ogni $t \in \mathrm{dom}\, x$

$$\| y = z \| \cdot (x(t) \Rightarrow \| t \in y \|) = \sup \{ p \leq \| y = z \| \mid p \leq \| t \in y \| \text{ ovvero } p \cdot x(t) = 0 \}$$

e, per l'ipotesi induttiva, la seconda delle (4.6) dà

$$\| t \in y \| \cdot \| y = z \| \leq \| t \in z \|$$

Pertanto $\sup \{ p \leq \| y = z \| \mid p \leq \| t \in y \| \} \leq \sup \{ p \leq \| y = z \| \mid p \leq \| t \in z \| \}$ da cui

$$\| y = z \| (x(t) \Rightarrow \| t \in y \|) \leq \sup \{ p \leq \| y = z \| \mid p \leq \| t \in z \| \text{ ovvero } p . x(t) = 0 \} \leq$$
$$\leq \sup \{ p \in B \mid p \leq \| t \in z \| \text{ ovvero } p . x(t) = 0 \} = (x(t) \Rightarrow \| t \in z \|)$$

Pertanto la (2.3) è provata assumendo le (4.6) e (2.3) come ipotesi induttiva.
La prima delle (4.6) si dimostra allora osservando che, per $t \in \mathrm{dom}\, y$,

$$\| x = z \| \cdot \| x = t \| \leq \| z = t \| \qquad \text{(per l'ipotesi induttiva)}$$

Moltiplicando allora per $y(t)$ e sommando su $\mathrm{dom}\,y$ si ottiene

$$\|x=z\|\sum_{t\in \mathrm{dom}\,y}(\|x=t\|\cdot y(t)) \leq \sum_{t\in\mathrm{dom}\,y}\|z=t\|\cdot y(t) = \|z\in y\|$$

che è precisamente la 1ª delle (4.6) (vedi la def. (4.2)).
Infine, per $t\in\mathrm{dom}\,x$, la def. (4.3) implica

$$x(t)\cdot\|x\subseteq z\| = x(t)\prod_{u\in\mathrm{dom}\,x}(x(u)\Rightarrow\|u\in z\|) \leq x(t)\,[x(t)\Rightarrow\|t\in z\|] =$$
$$= x(t)\cdot\|t\in z\| \leq \|t\in z\|$$

da cui utilizzando l'ipotesi induttiva per la 1ª delle (4.6)

$$x(t)\cdot\|x=z\|\cdot\|y=t\| \leq \|t\in z\|\,\|y=t\| \leq \|y\in z\|$$

Sommando allora su $\mathrm{dom}\,x$ si ottiene la 2ª delle (4.6).
Pertanto V^B è un modello booleano; prima di dimostrarne la pienezza dimostreremo l'estensionalità (ossia la (4.5)).
E' ovvio che $\forall\, a,b,c\in B$, se $a\leq b$ allora $(a\Rightarrow c)\geq(b\Rightarrow c)$.
Siano allora $x,y\in V^B$; per ogni $t\in\mathrm{dom}\,x$ si ha (ricordando $x(t)\leq\|t\in x\|$)

$$\|t\in x\|\Rightarrow\|t\in y\| \leq x(t)\Rightarrow\|t\in y\|$$

e pertanto

$$\prod_{t\in V^B}(\|t\in x\|\Rightarrow\|t\in y\|) \leq \prod_{t\in\mathrm{dom}\,x}(x(t))\Rightarrow\|t\in y\|) = \|x\subseteq y\|$$

Ossia $\|\forall t\,(t\in x\to t\in y)\| \leq \|x\subseteq y\|$ da cui segue la (4.5).
Sia infine $\varphi(x;x_1,\dots,x_n)$ una formula e siano $a_1,\dots,a_n\in V^B$ (che sottintenderemo per brevità); poiché ovviamente per $y\in V^B$ si ha $\|\varphi(y)\|\leq\|\exists x\,\varphi(x)\|$, occorre trovare un $y\in V^B$ per cui sia $\|\varphi(y)\|\geq\|\exists x\,\varphi(x)\| = b_0$
Posto $D=\{b\in B \mid \exists x_b\in V^B \text{ t.c. } b\leq\|\varphi(x_b)\|\}$ è immediato constatare che D è aperto e denso sotto b_0 e, applicando il lemma di Zorn si può trovare un sottinsieme $W\subseteq D$ massimale di elementi a 2 a 2 disgiunti.
Ma allora $\sum_{u\in W} u \geq \sum_{b\in B} b \geq b_0$.
Ora, per $t\in\bigcup_{u\in W}\mathrm{dom}\,x_u$, si ponga $y(t)=\sum_{u\in W}u\cdot x_u(t)$
(ove ovviamente si pone $x_u(t)=0$ se $t\notin\mathrm{dom}\,x_u$). Poiché W è disgiunto, si ha per ogni $u\in W$ $\quad u\cdot y(t)=u\cdot x_u(t)\quad$ da cui segue

$$u\leq\|y(t)\Rightarrow x_u(t)\|\cdot\|x_u(t)\Rightarrow y(t)\|$$

ossia, dalle (4.3), (4.4) $\quad u \leq \|y = x_u\|$
Ma allora, per $u \in W$ si ha $\quad u \leq \|y = x_u\| \cdot \|\varphi(x_u)\| \leq \|\varphi(y)\|$
e pertanto $\quad b_0 \leq \sum_{u \in W} u \leq \|\varphi(y)\|$ -

QED

Osservazione 3. In tutta la dimostrazione precedente si è utilizzato l'assioma di scelta solo per trovare W massimale, e cioè per dimostrare la pienezza di V^B; pertanto anche in ZF si dimostra che V^B è un modello booleano estensionale.

Esercizio 1. Si dimostrino le relazioni seguenti:

(i) $\quad \|(\exists y \in x)\, \varphi(y)\| = \sum_{y \in \operatorname{dom} x} x(y) \cdot \|\varphi(y)\|$

(ii) $\quad \|(\forall y \in x)\, \varphi(y)\| = \prod_{y \in \operatorname{dom} x} x(y) \Rightarrow \|\varphi(y)\|$

La (4.5) non è che un caso particolare del seguente

Teorema 2 Per ogni assioma σ di ZFC, si ha in V^B $\quad \|\sigma\| = 1$.

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema 2, conviene definire, per $x \in V$ un elemento canonico $\check{x} \in V^B$ dato dalla seguente definizione induttiva:

(4.8) $\quad \operatorname{dom} \check{x} = \{\check{y} \mid y \in x\} \qquad \check{x}(t) = 1 \quad \forall t \in \operatorname{dom} \check{x}$

Si ha allora un'immersione di V in V^B che verifica le proprietà seguenti:

Teorema 3 Sia $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una formula Δ_0 e siano $a_1, \dots, a_n \in V$.

Si ha allora:

$$(4.9) \qquad \mathcal{V} \models \varphi\,[a_1,\dots,a_n] \iff \|\varphi(\check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = 1$$

Di conseguenza, se φ è Σ_1, $\varphi(a_1,\dots,a_n) \Longrightarrow \|\varphi(\check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = 1$.

In particolare per $x \in V^B$ si ha

$$(4.10) \qquad \|x \text{ ordinale}\| = \sum_{\alpha\ \text{ord.}} \|x = \check{\alpha}\|$$

$$(4.11) \qquad \|x \text{ costruibile}\| = \sum_{a \in L} \|x = \check{a}\|$$

Dim: Dimostreremo la (4.9) per induzione sulla costituzione della formula φ cominciando a verificare che, per formule atomiche si ha

$$\|\check{a}_1 \in \check{a}_2\| = \begin{cases} 0 & \text{se } a_1 \notin a_2 \\ 1 & \text{se } a_1 \in a_2 \end{cases} \qquad \|\check{a}_1 = \check{a}_2\| = \begin{cases} 0 & \text{se } a_1 \neq a_2 \\ 1 & \text{se } a_1 = a_2 \end{cases}$$

Procedendo per induzione sul rango di $\check{a}_1$ e $\check{a}_2$ si ha infatti

$$\|\check{a}_1 \in \check{a}_2\| = \sum_{t \in \mathrm{dom}\, \check{a}_2} \check{a}_2(t)\, \|t = \check{a}_1\| = \sum_{t \in \check{a}_2} \|\check{t} = \check{a}_1\| = \begin{cases} 1 & \text{se } a_1 \in a_2 \\ 0 & \text{se } a_1 \notin a_2 \end{cases}$$

$$\|\check{a}_1 \subseteq \check{a}_2\| = \prod_{t \in \mathrm{dom}\, \check{a}_1} \check{a}_1(t) \Rightarrow \|t \in \check{a}_2\| = \prod_{t \in a_1} \|\check{t} \in \check{a}_2\| = \begin{cases} 1 & \text{se } a_1 \subseteq a_2 \\ 0 & \text{se } a_1 \nsubseteq a_2 \end{cases}$$

Ora supposto che φ e ψ verifichino la (4.9) (e assumano solo valori 0 o 1) è immediato che anche $\sim\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, ecc. verificano a loro volta la (4.9), assumendo solo valori 0 o 1.

Sia ora $\varphi(x, x_1,\dots,x_n)$ verificante la (4.9) (e con soli valori 0 o 1); resta da vedere che la quantificazione ristretta mantiene tale proprietà. Ora

$$\|\exists x \in \check{y}\, \varphi(x, \check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = \sum_{t \in \mathrm{dom}\, \check{y}} \check{y}(t)\, \|\varphi(t, \check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = \sum_{t \in y} \|\varphi(\check{t}, \check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\|$$

$$\|\forall x \in \check{y}\, \varphi(x, \check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = \prod_{t \in \mathrm{dom}\, \check{y}} \check{y}(t) \Rightarrow \|\varphi(t, \check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = \prod_{t \in y} \|\varphi(\check{t}, \check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\|$$

da cui segue subito che la (4.9) è conservata per quantificazione ristretta,

e vale quindi per ogni formula Δ_0.
Se ora $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ è Σ_1 sarà $\varphi \equiv \exists y \psi(y,x_1,\dots,x_n)$ ove ψ è Δ_0, e quindi

$$\|\varphi(\check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| = \sum_{t\in V^B} \|\psi(t,\check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\| \geqslant \sum_{y\in V} \|\psi(\check{y},\check{a}_1,\dots,\check{a}_n)\|$$

e quest'ultimo è 1 se $\exists y \psi(y,a_1,\dots,a_n)$ vale in V.

Per dimostrare le (4.10) e (4.11) si supponga valido il Teorema 2 (in modo che in V^B gli assiomi di ZFC sono validi).
Anzitutto si ricordi che "x ordinale" è una formula Δ_0 e pertanto
$\|x=\check{\alpha}\| \leqslant \|x \text{ ordin.}\| = b(x)$, da cui $b(x) \geqslant \sum_{\alpha \text{ ord}} \|x=\check{\alpha}\|$

D'altra parte per ogni α si ha $b(x) \leqslant \|x\in\check{\alpha}\| + \|x=\check{\alpha}\| + \|\check{\alpha}\in x\|$
Ma $\|x \text{ ord e } x\in\check{\alpha}\| = \sum_{\gamma\in\alpha} \|x=\check{\gamma}\|$, mentre $\|\check{\alpha}\in x\| = \sum_{t\in \operatorname{dom} x} x(t)\,\|\check{\alpha}=t\|$

e quindi $\{\alpha \mid \|\check{\alpha}\in x\| \neq 0\}$ è un insieme, per cui esiste un ordinale β_x tale che $b(x) \leqslant \sum_{\alpha<\beta_x} \|x=\check{\alpha}\| \leqslant \sum_{\alpha \text{ ord}} \|x=\check{\alpha}\|$.

La formula "x costruibile" (ossia $x\in L$, i.e. $\exists z(z \text{ ord} \wedge x\in L_z)$) è Σ_1 e quindi per ogni $a\in L$ si ha $\|\check{a} \text{ costruibile}\| = 1$ da cui
$\|x=\check{a}\| \leqslant \|x \text{ costruibile}\| = c(x)$, da cui $c(x) \geqslant \sum_{a\in L} \|x=\check{a}\|$

Viceversa anche $y=L_\alpha$ è Σ_1 e quindi $\|\check{L}_\alpha = L_{\check{\alpha}}\| = 1$. Allora
$$c(x) = \sum_z \|z \text{ ord}\|\cdot\|x\in L_z\| = \sum_z \Big(\sum_\alpha \|z=\check{\alpha}\|\Big)\|x\in L_z\| \leqslant \sum_z \Big(\sum_\alpha \|x\in L_{\check{\alpha}}\|\Big) = \sum_\alpha \|x\in \check{L}_\alpha\| =$$
$$= \sum_{a\in L_\alpha} \|x=\check{a}\| \leqslant \sum_{a\in L} \|x=\check{a}\|$$

QED

Procediamo ora alla dimostrazione del teorema 2, premettendo le seguenti osservazioni:

(i) Una volta dimostrata la validità dello schema di separazione, gli assiomi dell'unione e della potenza si possono dimostrare in forma debole (cioè basta trovare un insieme

$b \geq \bigcup a$ ovvero $\mathcal{P}(a)$, da cui si ottiene poi per separazione l'insieme voluto)

i) Anziché lo schema di rimpiazzamento si dimostrerà il cosiddetto "principio di collezione"

$$\forall a \exists b \forall x \in a (\exists y \varphi(x,y) \to \exists y \in b\, \varphi(x,y))$$

[i.e. data una "collezione" di classi non vuote C_x, $x \in a$ esiste un insieme b che le interseca tutte]

E' facile dimostrare in ZF la validità del principio di collezione (ad esempio si può usare il "trucco di Scott" e porre $b = \bigcup_{x \in a} b_x$ ove

$$b_x = \{z \in C_x \mid \rho(z) \leq \rho(t)\ \forall t \in C_x\}.$$

D'altra parte se φ è una formula "funzionale" l'immagine di a mediante φ si ottiene subito da b per separazione.

ii) Anziché l'assioma della scelta si dimostrerà la validità del teorema di Zermelo, nella forma che ogni insieme è contenuto nell'immagine di un insieme bene ordinato.

Ciò premesso, dato che si è già dimostrata l'estensionalità (cfr. (4.5)) si procederà agli altri assiomi uno per uno.

a) Assioma della coppia: Siano $a, b \in V^B$; si definisca $c \in V^B$ mediante $\mathrm{dom}\, c = \{a, b\}$ $c(a) = c(b) = 1$. E' immediato constatare che

$$\| t \in c \leftrightarrow t = a \vee t = b \| = 1$$

, ossia vale l'assioma della coppia

L'elemento c così definito si indica con $\{a,b\}^B$; si può definire anche la coppia ordinata Booleana ponendo $(a,b)^B = \{\{a\}^B, \{a,b\}^B\}^B$.

b) Schema di separazione: Sia $a \in V^B$ e sia $\varphi(x)$ una formula. Si definisca $b \in V^B$ ponendo $\mathrm{dom}\, b = \mathrm{dom}\, a$, $b(t) = a(t)\, \|\varphi(t)\|$ $\forall t \in \mathrm{dom}\, a$.

E' immediato constatare che con tale definizione si ha

$$\| b \subseteq a \| = 1 \quad \text{e} \quad \| \forall x \in a (x \in b \leftrightarrow \varphi(x)) \| = 1$$

Pertanto tale b rende valido l'assioma di separazione per $\varphi(x)$.

c) Ass. dell'unione: Sia $a \in V^B$ e si definisca $b \in V^B$ mediante

$$\mathrm{dom}\, b = \bigcup_{x \in \mathrm{dom}\, a} \mathrm{dom}\, x \qquad b(t) = 1 \quad \forall t \in \mathrm{dom}\, b$$

Un calcolo immediato fornisce $\|(\forall y \in a)(\forall z \in y)(z \in b)\| = 1$ e pertanto l'assioma dell'unione vale in forma debole (cfr (ii) a p. 14).

d) Ass. della potenza: Si osservi anzitutto che ~~...~~ dato $a \in V^B$ e preso $z \in V^B$, l'elemento $z' \in V^B$ definito da $\mathrm{dom}\, z' = \mathrm{dom}\, a$ $z'(t) = a(t) \cdot \|t \in z\|$ verifica ovviamente $\|z' \subseteq z\| = 1$.
D'altra parte si ha anche $\|z \subseteq a \to z \subseteq z'\| = 1$. Infatti $\left(\prod_{u \in \mathrm{dom}\, z} z(u) \Rightarrow \|u \in a\|\right) \leq \left(\prod_{u \in \mathrm{dom}\, z} z(u) \Rightarrow \|u \in z'\|\right)$ perchè

$$\|u \in z'\| = \sum_{t \in \mathrm{dom}\, a} a(t) \|t \in z\| \|t = u\| \leq \sum_{t \in \mathrm{dom}\, a} a(t) \|t = u\| = \|u \in a\|.$$

Pertanto ci si può limitare a considerare elementi del tipo di z' se si vogliono ottenere sottinsiemi booleani di a. Definendo allora b mediante $\mathrm{dom}\, b = \{z \in V^B \mid \mathrm{dom}\, z = \mathrm{dom}\, a,\ z(t) \leq a(t)\ \forall t \in \mathrm{dom}\, a\}$ $\quad b(t) = 1\ \forall t \in \mathrm{dom}\, b$
il ragionamento precedente permette di ottenere, per ogni z,
$$\|z \subseteq a \to z \in b\| = 1$$
da cui segue la forma debole dell'assioma della potenza.

e) Princ. di collezione: Sia $a \in V^B$ e sia $\varphi(x, y)$ una formula. Si definisca $b \in V^B$ ponendo $\mathrm{dom}\, b = \bigcup_{t \in \mathrm{dom}\, a} D_t \quad b(u) = 1\ \forall u \in \mathrm{dom}\, b$, ove gli insiemi

D_t sono scelti in modo che sia $\sum_{v \in V^B} \|\varphi(t, v)\| = \sum_{v \in D_t} \|\varphi(t, v)\|$

(si osservi che l'esistenza dei D_t segue, p. es., dal principio di collezione per V)
Si ha allora, se $t \in \mathrm{dom}\, a$
$$\|\exists y\, \varphi(t, y)\| = \sum_{v \in V^B} \|\varphi(t, v)\| = \sum_{v \in D_t} \|\varphi(t, v)\| \leq \sum_{v \in \mathrm{dom}\, b} \|\varphi(t, v)\| = \|\exists y \in b\, \varphi(t, y)\|,$$

Da cui segue subito la validità del princ. di collezione con tale scelta di b.

f) Ass. di fondazione: Sia $a \in V^B$ e poniamo $u = \|\exists x (x \in a) \wedge \forall y \in a\, \exists z \in (y \cap a)\|$.

Occorre dimostrare che $u=0$. Se così non fosse, sia $b\in V^B$ di rango minimo fra quanti verificano $\|b\in a\|.u\neq 0$. Allora si ha
$\|b\in a\|.u\leq \|\exists z\in(b\wedge a)\| = \|\exists z\in b\,(z\in a)\| = \sum_{z\in \mathrm{dom}\, b} b(z).\|z\in a\|$

Pertanto esiste $z\in \mathrm{dom}\, b$ t.c. $\|z\in a\|.\|b\in a\|.u\neq 0$ contro la minimalità di $\rho_B(b)$.

g) Assioma dell'infinito: "x verifica l'assioma dell'infinito" è una formula Δ_0, e quindi $\|\check{\omega}$ è infinito$\|=1$.

h) Assioma della scelta: "x è bene ordinabile" è Σ_1, e pertanto per ogni $x\in V$ si ha
$\|\check{x}$ è bene ordinabile$\|=1$.
Ora sia $a\in V^B$, sia $D=\mathrm{dom}\, a$ e si definisca $f\in V^B$ mediante
$\mathrm{dom}\, f=\{(\check{x},x)^B \mid x\in D\}$, $f(t)=1\ \forall t\in \mathrm{dom}\, f$.
Un computo diretto permette di verificare immediatamente che
$\|f$ è una funzione$\|=1$, $\|\mathrm{dom}\, f=\check{D}\|=1$, $\|a\subseteq \mathrm{Im}\, f\|=1$
Poichè $\|\check{D}$ è bene ordinabile$\|=1$, si ha subito la tesi.

Q.E.D.

Si osservi che l'assioma della scelta è intervenuto in 2 soli punti nella dimostrazione dei teoremi 1,2,3: per dimostrare che $\mathcal{V}^B$ è <u>pieno</u>, e per dimostrare che $\|AC\|=1$.

Prima di concludere il paragrafo dimostriamo un risultato che avrà vasta portata nel seguito, in quanto fornisce un "ultrafiltro canonico" in $\mathcal{V}^B$.

<u>Lemma</u> 3. <u>Si definisca</u> $\mathbb{G}\in V^B$ <u>mediante</u>

$$\mathrm{dom}\,\mathbb{G}=\{\check{b}\mid b\in B\},\quad \mathbb{G}(\check{b})=b\quad \forall b\in B.$$

Si ha allora

$$(4.12)\begin{cases} \| \mathbb{G} \text{ è un ultrafiltro su } \check{B} \| = 1 \\ \| \forall \check{E} \in \check{\mathcal{P}(B)} \, (\check{E} \subseteq \mathbb{G} \rightarrow (\check{\prod E}) \in \mathbb{G}) \| = 1 \end{cases}$$

Dim: Ovviamente per $b \in B$ si ha $\| \check{b} \in \mathbb{G} \| = b$ e quindi anche $\| G \subseteq \check{B} \| = 1$. Perciò $\| \check{0} \notin \mathbb{G} \| . \| \check{1} \in \mathbb{G} \| . \prod_{b \in B} \| \check{b} \in \mathbb{G} \vee (\check{-b}) \in \mathbb{G} \| = 1$, che non è altro che la prima delle (4.12) (Si osservi che $\| \check{B}$ è un'alg. di Boole$\| = 1$)
Ora sia $E \in \mathcal{P}(B)$. Si ha

$$\| \check{E} \subseteq \mathbb{G} \| = \| (\forall x \in \check{E})(x \in \mathbb{G}) \| = \prod_{x \in E} \| \check{x} \in \mathbb{G} \| = \prod_{x \in E} x = \| (\check{\prod E}) \in \mathbb{G} \|$$

Pertanto per $E \in \mathcal{P}(B)$ si ha $\| \check{E} \subseteq \mathbb{G} \rightarrow (\check{\prod E}) \in \mathbb{G} \|$ da cui la seconda delle (4.12), cui si fa spesso riferimento dicendo che $\mathbb{G}$ è un ultrafiltro $\check{\mathcal{P}(B)}$-completo su $\check{B}$.

QED

Osservazione 4. Si è dunque dimostrato che in V^B vale l'esistenza di un ultrafiltro $\check{\mathcal{P}(B)}$-completo: si osservi che questo non implica l'esistenza di un ultrafiltro completo, in quanto $\check{\mathcal{P}(B)}$ non corrisponde all'insieme potenza di $\check{B}$ in V^B; analogamente anche $\check{B}$ è un'algebra di Boole $\check{\mathcal{P}(B)}$-completa, ma non completa in V^B.

Esercizio 2. Si dimostri che in V^B si ha

$$\| \mathbb{G} \text{ principale} \| = \sum A$$

ove A è l'insieme degli atomi di B.

Esercizio 3. Si dimostri che se vale l'assioma di costruibilità $V = L$, allora si ha anche

$$\| \check{\mathcal{P}(B)} = \mathcal{P}(\check{B}) \| = 1 \text{, perciò in tal caso}$$

$$\| \text{Esiste un ultrafiltro completo su } \check{B} \| = 1$$