§3. Modelli generici e forcing

La costruzione del modello booleano V^B è stata eseguita utilizzando solo gli assiomi di ZFC e le proprietà dell'algebra di Boole B. Pertanto, partendo da un qualunque modello transitivo $\mathcal{M}=(M, \in_{|M^2})$ di ZFC (anche nel senso generalizzato in cui M è una classe propria), purchè $B \in \mathcal{M}$ e sia un'algebra di Boole completa in $\mathcal{M}$ (ossia $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}(B)$-completa, ovvero $(\mathcal{P}(B)\cap M)$-completa), si può effettuare la costruzione degli M^B_α esattamente come prima, e si può quindi definire $M^B = \bigcup_{\alpha\in M} M^B_\alpha$ e ottenere un modello booleano $\mathcal{M}^B$ in cui valgano i teoremi 1,2,3 del paragrafo precedente.

Se poi G è un ultrafiltro su B si può considerare in $\mathcal{M}^B$ la relazione di equivalenza $\equiv_G$ ~~definita a pag.~~, e su $M^B/\equiv_G$ la relazione R_G definite come a p.7 ($x \equiv_G y$ se $\|x=y\| \in G$ e $[x]\, R_G\, [y]$ se $\|x \in y\| \in G$; si osservi che R_G è ben definita, e che se M è una classe propria occorre utilizzare il "trucco di Scott", definendo ad es. $[x] = \{z \in M^B \mid z \equiv_G x \text{ e } \rho_B(z) \leq \rho_B(y)\ \forall y \equiv_G x\}$).

Si ottiene così un modello ordinario $\mathcal{M}^B/G = (M^B/\equiv_G, R_G)$ per il quale vale la tesi del lemma 2. Il caso più interessante si ha però quando G è M-completo (i.e. se $\forall E \in M \ E \subseteq G \Rightarrow \prod E \in G$); vale infatti il seguente

<u>Lemma</u> 4. <u>Se</u> G <u>è</u> <u>un</u> <u>ultrafiltro</u> M-<u>completo</u> <u>su</u> B, <u>la</u> <u>relazione</u> R_G <u>è</u> <u>ben</u> <u>fondata</u> <u>su</u> $M^B/\equiv_G$ -

<u>Dim</u>: Basterà dimostrare che se $\|x \in y\| \in G$ si può scegliere $t \in \mathrm{dom}\, y$ in modo che sia $\|t = x\| \in G$ e $\|t \in y\| \in G$; in tal caso infatti una successione $\{x_n \mid n \in \omega\}$ t.c. $[x_{n+1}] R_G [x_n]$ porta automaticamente passando al rango ϱ_B ad una successione decrescente di ordinali -

Ora $\|x \in y\| = \sum_{t \in \mathrm{dom}\, y} y(t) \cdot \|t = x\| \in G \iff \exists t \in \mathrm{dom}\, y \ \ y(t) \cdot \|t = x\| \in G$ per la M-completezza di G; ma allora $\|t = x\| \in G$ e quindi da $[x] = [t]$ segue $\|t \in y\| \in G$.

QED

Si può dunque utilizzare il teorema di Mostowski per ottenere un modello transitivo isomorfo ad $\mathcal{M}^B/G$, che è univocamente determinato e si indica con $\mathcal{M}[G] = (M[G], \in|_{M[G]^2})$ e si chiama <u>estensione</u> <u>generica</u> <u>di</u> $\mathcal{M}$ - Si osservi che esiste un'unica applicazione surgettiva $i_G : M^B \longrightarrow M[G]$ (ottenuta per composizione della proiezione canonica su $M^B/\equiv_G$ con l'isomorfismo di Mostowski) che verifica le relazioni

(5.1) $\quad i_G(x) \in i_G(y)$ se e solo se $\|x \in y\| \in G$

(5.2) $\quad i_G(x) = i_G(y)$ se e solo se $\|x = y\| \in G$

<u>E' immediato constatare che la funzione</u> i_G si può definire induttivamente ponendo

(5.3) $\quad i_G(x) = \{ i_G(y) \mid y \in \operatorname{dom} x \ \text{ e } \ x(y) \in G \}$

(naturalmente questa per noi non è una definizione induttiva, ma una semplice conseguenza della definizione diretta di i_G)

Inoltre, tenuto conto dei risultati del paragrafo precedente e del fatto che l'isomorfismo di Mostowski induce l'identità su sottoclassi transitive si ottiene ancora

(5.4) $\quad i_G(\check{x}) = x \qquad \forall x \in M$

(che d'altronde si poteva ottenere subito direttamente dalla (4.8) e (5.3))

Un calcolo diretto mostra infine che

(5.5) $\quad i_G(\underset{\sim}{G}) = G$

E' allora semplice dimostrare la seguente versione Booleana del teorema di Cohen sui modelli Generici (dovuta essenzialmente a Scott):

Teorema 4 $\quad$ Sia $\mathcal{M} = (M, \in)$ un modello transitivo di ZFC, sia B un'algebra di Boole completa in $\mathcal{M}$ e sia G un ultrafiltro $\mathcal{M}$-completo su B. Esiste allora un'unica classe transitiva $M[G]$ ed un'unica applicazione surgettiva $i_G : M^B \longrightarrow M[G]$ che verifica la seguente proprietà per ogni formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

(5.6) $\quad \| \varphi(a_1, \dots, a_n) \| \in G$ se e solo se $\mathcal{M}[G] \models \varphi[i_G(a_1), \dots, i_G(a_n)]$

Il modello transitivo $\mathcal{M}[G]$ gode delle seguenti proprietà:

(i) $M \subseteq M[G]$ e $G \in M[G]$

(ii) $\mathcal{M}[G]$ ~~[illegible]~~ è un modello transitivo di ZFC.

(iii) Se $\mathcal{N}$ verifica (i) ed (ii), allora $M[G] \subseteq N$ (e pertanto le condizioni (i), (ii) e (iii) determinano univocamente $M[G]$).

(iv) M ed $M[G]$ hanno gli stessi ordinali.

Dimostr: La (5.6) per formule atomiche ~~non~~ è conseguenza immediata delle (5.1), (5.2); nel caso generale, d'altra parte, non vi è che da applicare il lemma 2. (Si poteva volendo fare una dimostrazione induttiva sulla complessità di φ).

La (i) è data dalle (5.4) e (5.5), mentre la (ii) segue dalla ovvia considerazione che ogni assioma di ZFC è una sentenza di valore booleano 1 in $\mathcal{M}^B$.

Quanto alla (iii), si osservi anzitutto che se $x \in M^B$ allora $\exists \alpha \in M$ t.c. $x \in M^B_\alpha$ e quindi $M^B_\alpha \in M \subseteq N$ da cui $i_G|_{M^B_\alpha} \in N$, come si può vedere procedendo per induzione su α e tenendo conto delle (5.3). Allora $i_G(x) \in N$, da cui la (iii)

Infine ovviamente $\mathrm{Ord} \cap M \subseteq \mathrm{Ord} \cap M[G]$; d'altra parte se $x \in M^B$ è facile vedere (per induzione su $\rho(x)$) che $\rho(i_G(x)) \leq \rho_B(x) \in \mathrm{Ord} \cap M$. Pertanto ogni elemento di $M[G]$ ha per rango un ordinale di M, e dunque vale la (iv).

QED

Osservazione 5. Se nel modello base $\mathcal{M}$ non vale l'assioma della scelta, pur non potendosi usare il lemma 2 si può ugualmente procedere con la definizione (5.3) di i_G e si ottiene l'intero teorema 4, con l'unica ovvia modifica che non è detto che sia $\mathcal{M}[G] \models AC$.

Si osservi ancora che per la validità di (iii) non occorre che $\mathcal{N} \models AC$, ma basta che sia un modello transitivo di ZF.

Osservazione 6. L'utilità del teorema 4 si basa naturalmente sull'esistenza di ultrafiltri $\mathfrak{M}$-completi: questa è una questione che verrà ripresa in seguito (cfr. comunque l'esercizio 3 per il caso $M = L$); osserviamo però che se $\mathfrak{M}$ è un modello numerabile il seguente lemma 5, che è l'analogo del lemma 1, risolve positivamente la questione

Lemma 5 Sia B un'algebra di Boole completa, e sia $\mathcal{D}$ un sottinsieme numerabile di $\mathcal{P}(B)$. Allora esiste un ultrafiltro G su B tale che se $D \in \mathcal{D}$ e $D \subseteq G$ allora $\prod D \in G$.

Dim: Sia $\{D_n \mid n \in \omega\}$ un'enumerazione di $\mathcal{D}$ e si definisca la successione $\{b_n \mid n \in \omega\}$ ponendo $b_0 = 0$, $b_{n+1} = b_n \cdot \prod D_n$ se in tal modo $b_{n+1} \neq 0$, altrimenti $b_{n+1} = b_n \cdot (-d_n)$ ove $d_n \in D_n$ è scelto in modo che sia $b_{n+1} \neq 0$ (e ciò è possibile altrimenti $0 = b_n \cdot \sum_{d_n \in D_n} (-d_n) = b_n(-\prod D_n)$ e quindi $b_n \cdot \prod D_n \neq 0$).
I b_n formano una successione debolm. decrescente di elementi non nulli e pertanto esistono ultrafiltri che contengono tutti i b_n: uno qualunque di essi verifica necessariamente la tesi del lemma.

QED

Per quanto le estensioni generiche conservino gli ordinali, esse non necessariamente conservano i cardinali (ed anzi un classico uso di esse è proprio il cosiddetto "collasso" di cardinali su cardinali inferiori); perchè dunque si possano dimostrare utili risultati concernenti le cardinalità, si forniranno ora alcune condizioni che garantiscono la conservazione delle cardinalità.

~~Assumiamo~~ In tutto quanto segue si supporrà che B sia un'algebra di Boole complet. nel modello base $\mathcal{M}$, e che G sia un ultrafiltro $\mathcal{M}$-completo su B.

<u>Lemma 7</u> <u>Se B è μ-saturata (in $\mathcal{M}$) e se μ è un cardinale regolare non numerabile (in $\mathcal{M}$), allora μ è un cardinale regolare in $\mathcal{M}[G]$.</u>

Dim: Se la cofinalità di μ in $\mathcal{M}[G]$ fosse $\nu<\mu$, dovrebbe esistere un $f\in\mathcal{M}^B$ tale che $\|f \text{ funzione}\|\cdot\|\mathrm{dom} f=\check{\nu}\|\cdot\|\mathrm{Im} f \text{ cofinale in } \check{\mu}\| = b \in G$.
Posto allora per $\alpha<\nu$ e $\beta<\mu$ $\quad b(\alpha,\beta) = b\cdot\|f(\check{\alpha})=\check{\beta}\|$ si avrebbe, poichè f è una funzione, (*) $b(\alpha,\beta_1)\cdot b(\alpha,\beta_2)=0$ se $\beta_1\neq\beta_2$.
Poichè d'altra parte $\mathrm{Im} f$ è cofinale in $\check{\mu}$, $\forall\beta<\mu\ \exists\alpha<\nu$ t.c. $b(\alpha,\gamma)\neq 0$ per un opportuno $\gamma>\beta$, $\gamma\in\mu$. Pertanto $\{\beta<\mu \mid \exists\alpha<\nu\,(b(\alpha,\beta)\neq 0)\}$ è cofinale in μ (in $\mathcal{M}$) e perciò ha cardinalità μ (in $\mathcal{M}$).
Poichè però $\nu<\mu$, esisterà un $\alpha\in\nu$ tale che $\{\beta<\mu \mid b(\alpha,\beta)\neq 0\}$ abbia (in $\mathcal{M}$) cardinalità μ: questo però è assurdo perchè, per la (*), i $b(\alpha,\beta)$ di cui sopra sono una famiglia disgiunta.
Dunque $(\mathrm{cof}\,\mu)^{\mathcal{M}[G]}=\mu$ che è dunque un cardinale regolare anche in $\mathcal{M}[G]$.
QED

<u>Corollario 7.1</u> <u>Se μ è un cardinale di $\mathcal{M}$ e $\mu\geq(\mathrm{sat}\,B)^{\mathcal{M}}$, allora μ è un cardinale anche in $\mathcal{M}[G]$; se $\mathrm{cof}^{\mathcal{M}}\lambda\geq\mathrm{sat}^{\mathcal{M}}B$, allora $\mathrm{cof}^{\mathcal{M}}\lambda=\mathrm{cof}^{\mathcal{M}[G]}\lambda$.</u>

<u>In particolare se (in $\mathcal{M}$) B è $\aleph_1$-saturata, allora $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{M}[G]$ hanno gli stessi cardinali e le stesse cofinalità.</u>

Dim: Se $(\mathrm{Sat}\,B)^{\mathcal{M}}=\nu$ e μ è regolare si applica il lemma; se μ è un cardinale singolare (in $\mathcal{M}$) allora deve essere $\mu>\nu$ (che è regolare in $\mathcal{M}$) e quindi limite di cardinali regolari $>\nu$, e pertanto resta un cardinale in $\mathcal{M}[G]$; infine $\mathrm{cof}^{\mathcal{M}}\lambda$ è sempre un cardinale regolare (in $\mathcal{M}$).
Tenendo conto che ω è assoluto, la seconda asserzione è ovvia conseguenza del lemma 7. QED

Lemma 8 - Sia μ un cardinale infinito (in M) tale che B sia μ-distributiva (in M).

Allora se $f : \mu \to M$ appartiene ad $M[G]$, f appartiene già ad M.

Dim: Sia $g \in M^B$ t.c. $i_G(g) = f$; allora $\| g \text{ funzione} \| . \| \operatorname{dom} g = \check{\mu} \| = b \in G$. Inoltre, poiché $f(\alpha) \in M$ $\forall \alpha < \mu$, si ha in M^B $\sum_{x \in M} \| g(\check{\alpha}) = \check{x} \| = b_\alpha \in G$ $\forall \alpha \in \mu$. Ora per ogni $\alpha \in \mu$ si scelga un insieme $I_\alpha \in M$ tale che $b_\alpha = \sum_{x \in I_\alpha} \| g(\check{\alpha}) = \check{x} \|$. Posto $b_{\alpha, x} = \| g(\check{\alpha}) = \check{x} \|$, per la μ-distributività si ottiene $\prod_{\alpha < \mu} \sum_{i \in I_\alpha} b_{\alpha x} = \sum_{h \in X I_\alpha} \prod_{\alpha < \mu} b_{\alpha, h_\alpha}$. Poiché il membro sinistro è $\prod_\alpha b_\alpha \in G$, anche il membro destro deve appartenere a G, e perciò esiste un $h \in \mathsf{X}_{\alpha < \mu} I_\alpha$ t.c. $\prod_{\alpha < \mu} b_{\alpha, h_\alpha} \in G$ ossia $\| \forall \check{\alpha} < \check{\mu} \; g(\check{\alpha}) = \check{h}_\alpha \| \in G$ e quindi f coincide con h in $M[G]$ e dunque anche in M: ma h è in M, da cui la tesi

QED

Corollario 8.1. Sia μ un cardinale infinito (in M) tale che B sia μ-distributiva (in M). Allora

(i) Ogni cardinale in M $\leq \mu$ rimane un cardinale in $M[G]$

(ii) Se $\operatorname{cof}^M \lambda \leq \mu$, allora $\operatorname{cof}^{M[G]} \lambda = \operatorname{cof}^M \lambda$

(iii) Se $\operatorname{cof}^M \lambda > \mu$, allora $\operatorname{cof}^{M[G]} \lambda > \mu$ (ma non è necessariamente conservata).

(iv) $\mathcal{P}(\mu) \cap M = \mathcal{P}(\mu) \cap M[G]$ e quindi anche in $M[G]$ $|2^\mu|^M \geq \mu^+$

Dim: Se $f : \nu_1 \to \nu_2$ è in $M[G]$ e ν_1 è un cardinale $\leq \mu$, allora f è in M e quindi valgono le (i), (ii), (iii). La (iv) segue subito dal lemma considerando le funzioni caratteristiche su μ.

Corollario 8.2 Se B è μ-distributiva e μ^+-saturata (in M), allora M ed $M[G]$ hanno gli stessi cardinali e le stesse cofinalità; anzi all'uopo è sufficiente che B sia μ^+-saturata e ν-distributiva per ogni $\nu < \mu$.

In questo modo abbiamo condizioni sufficienti per la conservazione dei cardinali nelle estensioni generiche che saranno assai utili nel successivo paragrafo. Una relazione che vale comunque, senza ipotesi ulteriori, è contenuta nel seguente

<u>Esercizio 4</u> <u>Se</u> μ <u>è</u> <u>un</u> <u>cardinale</u> <u>in</u> $\mathfrak{M}$, <u>si</u> <u>ha</u> $(2^{\mu})^{\mathfrak{M}[G]} \leq (|B|^{\mu})^{\mathfrak{M}}$,

<u>ossia</u> : $|\mathcal{P}(\mu) \cap M[G]|^{\mathfrak{M}[G]} \leq |{}^{\mu}B \cap \underline{M}|^{\mathfrak{M}}$

[Sia $a \in \mathcal{P}(\mu) \cap M[G]$, sia $c \in \underline{M}^B$ t.c. $i_G(c) = a$ e sia $f_a : \mu \to B$ definita da $f_a(\alpha) = \| \check{\alpha} \in c \|$. Si dimostri che $f_a \in \underline{M}$, $a \mapsto f_a$ è in $\underline{M}[G]$ ed è iniettiva].

Poichè nella pratica è più facile determinare le nozioni di forcing occorrenti per ottenere determinati teoremi nel modello generico $\mathfrak{M}[G]$, piuttosto che descrivere direttamente l'algebra di Boole occorrente, mostreremo come il modello $\mathfrak{M}[G]$ si possa ottenere partendo da un insieme $\mathfrak{M}$-generico di condizioni di forcing e come si esprimono le proprietà corrispondenti al <u>teorema</u> 4 in tale caso.

Sarebbe possibile, ma estremamente scomodo, descrivere tutto il procedimento senza utilizzare l'algebra di Boole completa corrispondente alla nozione di forcing impiegata (si veda la trattazione di Cohen [ ]): seguiremo invece la via di mostrare il collegamento diretto che vi è tra le definizioni relative al forcing e quelle attinenti ai modelli booleani.

In tutto quanto segue si consideri fissato un modello transitivo M e sia $(P, \leq)$ una nozione di forcing in M; sia B il suo completamento (in M) e sia $j: P \to B - \{0\}$ l'applicazione canonica (vedi Teo. 0.3).

Definizione 5: Si dice linguaggio del forcing associato alla nozione P il linguaggio ottenuto aggiungendo al linguaggio $\{\in\}$ della teoria degli insiemi un insieme (o una classe) di simboli di costanti, che possiamo identificare con gli elementi del modello booleano M^B.

Si osservi che le sentenze del linguaggio del forcing si possono ottenere considerando una formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ del linguaggio insiemistico e sostituendo alle variabili libere $(x_1, \dots, x_n)$ di φ una n-upla di costanti, ossia di elementi $a_1, \dots, a_n \in M^B$: si indicherà tale sentenza con $\varphi(a_1, \dots, a_n)$. Di conseguenza per ogni sentenza σ del linguaggio del forcing risulta definito il valore $\|\sigma\| \in B$ (cfr. defin. 2).

La relazione di forcing $\Vdash$ è una relazione fra le condizioni di forcing $p \in P$ e le sentenze σ del linguaggio del forcing associato a P, definita da

(6.1) $p \Vdash \sigma$ se e solo se $j(p) \leq \|\sigma\|$

Si dimostrino a titolo di esercizio, a partire dalla (6.1), le caratteristiche proprietà della relazione di forcing già elencate nel §1 a p.4, (a)-(f):

(6.2) Se $p \Vdash \sigma$ e $q \leq p$, allora $q \Vdash \sigma$

(6.3) Se $\forall q \leq p\ \exists r \leq q$ t.c. $r \Vdash \sigma$, allora $p \Vdash \sigma$

(6.4) $\forall p \in P$ e $\forall$ sentenza σ, $\exists q \leq p$ t.c. $q \Vdash \sigma$ ovvero $q \Vdash \sim\sigma$

(6.5) Se $p \Vdash \sigma$, allora non si ha $p \Vdash \sim\sigma$

(6.6.1) $p \Vdash \sigma \wedge \tau$ se e solo se $p \Vdash \sigma$ e $p \Vdash \tau$

(6.6.2) $p \Vdash \sim\sigma$ se e solo se nessun $q \leq p$ è t.c. $q \Vdash \sigma$

(6.6.3) $p \Vdash \forall x\, \varphi(x)$ se e solo se, per ogni costante c, $p \Vdash \varphi(c)$

(6.6.4) $p \Vdash \sigma \vee \tau$ se e solo se $\forall q \leq p\ \exists r \leq q$ t.c. $r \Vdash \sigma$ ovvero $r \Vdash \tau$

(6.6.5) $p \Vdash \sigma \rightarrow \tau$ se e solo se $\forall q \leq p$ se $q \Vdash \sigma$ allora $q \Vdash \tau$

(6.6.6) $p \Vdash \sigma \leftrightarrow \tau$ se e solo se $\forall q \leq p$ $q \Vdash \sigma$ se e solo se $q \Vdash \tau$

(6.6.7) $p \Vdash \exists x\, \varphi(x)$ se e solo se $\forall q \leq p\ \exists r \leq q$ t.c. $r \Vdash \varphi(c)$ per un'opportuna costante c.

Si osservi anche che dalla definizione 5 risulta evidente che la relazione di forcing $\Vdash$ è una relazione in M, purchè la nozione di forcing P sia in M.

Ricordando che un ultrafiltro G su B si dice $\mathfrak{M}$-completo se per ogni $E \in \mathfrak{M}$

si ha $E \subseteq G \Rightarrow \prod E \in G$ (o equivalentemente $E \subseteq G$ e $\sum E \in G \Rightarrow E \cap G \neq \emptyset$),

si può osservare anzitutto che G è un ultrafiltro $\mathcal{M}$-completo su B se e solo se G è un sottoinsieme $\mathcal{M}$-generico di $B - \{0\}$ (considerato come nozione di forcing).

Questo non è che un caso particolare banale del seguente

<u>Lemma</u> 9 - (i) <u>Se</u> G <u>è</u> <u>un</u> <u>ultrafiltro</u> $\mathcal{M}$-<u>completo</u> <u>su</u> B, <u>allora</u> <u>l'insieme</u>

$$G' = j^{-1}(G) \quad \text{è } \mathcal{M}\text{-generico su } P.$$

(ii) <u>Se</u> G' <u>è</u> <u>un</u> <u>insieme</u> $\mathcal{M}$-<u>generico</u> <u>su</u> P, <u>allora</u> <u>l'insieme</u>

$$G = \{ b \in B \mid \exists p \in G' \text{ t.c. } j(p) \leq b \} \quad \text{è un ultrafiltro } \mathcal{M}\text{-completo.}$$

<u>Inoltre</u>, <u>in</u> <u>entrambi</u> <u>i</u> <u>casi</u>, <u>ogni</u> <u>modello</u> <u>transitivo</u> $N \supseteq M$ <u>verifica</u>

(iii) $N \ni G$ <u>se</u> <u>e</u> <u>solo</u> <u>se</u> $N \ni G'$

<u>Dim</u> - (i) Sia $D' \in M$ un sottinsieme denso in P: allora $D = j(D')$ è denso in B e quindi $(D \cap G) \neq \emptyset$ (infatti altrimenti $G \ni -d$ $\forall d \in D$ da cui $G \ni \prod(-d) = -\sum d = 0$, assurdo). Allora $D' \cap G' = D' \cap j^{-1}(G) \neq \emptyset$, e dunque basta dimostrare che G' è un filtro su P, e per questo l'unica condizione non banale è che $p, q \in G' \Rightarrow \exists r \in G'$ $r \leq p$ e $r \leq q$. Posto $E_{p,q} = \{ r \in P \mid r \leq p \text{ e } r \leq q \} \cup \{ r \in P \mid r \text{ incomp. con } p \} \cup \{ r \in P \mid r \text{ incomp. con } q \}$ è immediato verificare che $E_{p,q}$ è denso in P. Ora però se $p, q \in G'$ ogni $r \in G' \cap E_{p,q}$ non potendo essere incompatibile con p, nè con q sarà $\leq p$ e di q.

(ii) G è ovviamente un filtro su B; se D è un sottinsieme denso in B, l'insieme $D' = \{ p \in P \mid \exists d \in D \; j(p) \leq d \}$ è denso in P perchè $j(P)$ è denso in B. Ora se $b \in B$, l'insieme $D_b = \{ x \in B \mid x \leq b \text{ ovvero } x \leq -b \}$ è denso in B e quindi il corrispondente $D'_b = \{ p \in P \mid j(p) \leq b \text{ ovvero } j(p) \leq -b \}$ è denso in P e pertanto $G' \cap D'_b \neq \emptyset$; ma allora o b o $-b$ devono appartenere a G, che è dunque un ultra=

filtro. Per verificare la $\mathcal{M}$-completezza di G sia $E \in M$, $E \subseteq G$ e pongasi
$D'_E = \{ p \in P \mid j(p) \leq \prod E$ ovvero $\exists x \in E$ t.c. $x \cdot j(p) = 0 \}$
D'_E è ovviamente denso in P, quindi interseca G'; sia $q \in G' \cap D'_E$ e suppongasi che non sia $j(q) \leq \prod E$: allora sarebbe $j(q) \cdot x = 0$ per un opportuno $x \in E$, assurdo in quanto ogni elemento di G è compatibile con ogni elemento di $j(G')$.

(iii) Ogni sovramodello transitivo $N \supseteq M$ contiene l'applicazione canonica j, pertanto la (iii) segue dal fatto che, in entrambi i casi, si ha
$$j(p) \in G \iff p \in G'$$
QED

In virtù della (iii) è possibile definire il modello generico $M[G']$ e l'applicazione canonica $i_{G'} : M^B \longrightarrow M[G']$ in modo analogo a quanto fatto a pag 19, ottenendo il seguente teorema, del tutto analogo al teorema 4:

Teorema 4'. Sia $\mathcal{M} = (M, \in)$ un modello transitivo di ZFC, sia $(P, \leq)$ una nozione di forcing in $\mathcal{M}$ e sia G' un insieme $\mathcal{M}$-generico su P. Esistono allora un'unica classe transitiva $M[G']$ ed un'unica interpretazione $i_{G'}$ delle costanti del linguaggio del forcing associato a P che verificano, ~~le seguenti~~ per ogni sentenza $\varphi(c_1, \dots, c_n)$ del linguaggio del forcing,

(5.6)' $\mathcal{M}[G'] \models \varphi\,[i_{G'}(c_1), \dots, i_{G'}(c_n)]$ se e solo se $\exists p \in G'$ t.c. $p \Vdash \varphi(c_1, \dots, c_n)$

Inoltre il modello transitivo $\mathcal{M}[G']$ verifica le seguenti proprietà

(i)' $M \subseteq M[G']$ e $G' \in M[G']$

(ii)' $\mathcal{M}[G']$ è un modello transitivo di ZFC

(iii)' Se $\mathcal{N}$ verifica (i)' ed (ii)', allora $M[G'] \subseteq N$

(iv)' M ed $M[G']$ hanno gli stessi ordinali.

In effetti il teorema 4' si può dedurre direttamente dal teorema 4 e dal lemma 9 utilizzando il seguente

Lemma 10. Siano $\mathcal{M}$, P, G' come nel teorema 4' e siano B, G come nel lemma 9.

Allora se si pone $M[G] = M[G']$ ed $i_G = i_{G'}$ valgono tutte le asserzioni del teorema 4'.

Dim: Tutte le asserzioni sono conseguenze immediate delle definizioni, dei teoremi citati, e della seguente caratterizzazione dell'interpretazione $i_{G'}$ (si tenga presente che le costanti del linguaggio del forcing sono gli elementi di M^B):

$$(5.3)' \quad i_{G'}(c) = \{ i_{G'}(t) \mid t \in \operatorname{dom} c \text{ e } \exists p \in G' \text{ t.c. } j(p) \leq c(t) \}$$

QED

Concludiamo con una caratterizzazione della relazione di forcing valida senz'altro, ad esempio, se il modello di base M è numerabile:

Esercizio 5. Si dimostri che se per ogni condizione di forcing $p \in P$ esiste un insieme $\mathcal{M}$-generico $G' \ni p$, si ha per ogni sentenza $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ del linguaggio del forcing:

$$p \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n) \text{ se e solo se } \forall G' \text{ generico } G' \ni p \Rightarrow \mathcal{M}[G] \models \varphi[i_{G'}(c_1), \ldots, i_{G'}(c_n)]$$