§4. Risultati di consistenza con ZF

Poichè le nozioni di forcing che utilizzeremo in questo paragrafo saranno ~~quasi~~ sempre costituite di funzioni ordinate per inclusione inversa, e poichè, come si è visto nel ~~par~~ §3, le questioni di μ-distributività e di μ-saturazioni sono essenziali per trattare i cardinali nelle estensioni generiche, faremo uso del seguente

Lemma 11. Sia μ un cardinale regolare t.c. $2^{<\mu} = \mu$. Siano X, Y insiemi arbitrari e suppongasi $|Y| \leq \mu$. Si definisca la nozione di forcing $(P, \leq)$ ponendo

$$p \in P \iff p : E \to Y \ \text{ e } \ E \subseteq X, \ |E| < \mu.$$

$$p \leq q \iff p \supseteq q \ \left(\text{i.e. } \operatorname{dom} p \supseteq \operatorname{dom} q \ \text{ e } \ p|_{\operatorname{dom} q} = q\right)$$

Allora P è μ^+-saturato e ν-chiuso per ogni $\nu < \mu$.

Dim: Sia W un sottinsieme incompatibile di P. Si definiscano induttivamente, per $\alpha < \mu$, i sottinsiemi $E_\alpha \subseteq X$ e $W_\alpha \subseteq W$ ponendo $W_0 = \{w\}$ per un arbitrario $w \in W$ ed $E_0 = \operatorname{dom} w$. (Si vuol ottenere inoltre che sia $E_\alpha = \bigcup_{w \in W_\alpha} \operatorname{dom} w \ \ \forall \alpha < \mu$).
Dati E_α e W_α, per ogni $p \in P$ t.c. $\operatorname{dom} p \subseteq E_\alpha$ si scelga un $w_p \in \{z \in W \mid z|_{E_\alpha} = p\}$ (purchè tale insieme sia non $\emptyset$), altrimenti nulla. Si ponga allora

$$W_{\alpha+1} = W_\alpha \cup \{w_p \mid p \text{ come sopra}\} \qquad E_{\alpha+1} = \bigcup_{w \in W_{\alpha+1}} \operatorname{dom} w$$

Se λ limite, si definiscano W_λ ed E_λ per continuità. Sia poi $E = \bigcup_{\alpha < \mu} E_\alpha$.
Ora se $w \in W$ esiste un $\alpha < \mu$ t.c. $\operatorname{dom} w \cap E = \operatorname{dom} w \cap E_\alpha$ (poichè μ è regolare).
Posto allora $p = w|_{E_\alpha}$ vi è un $w_p \in W_{\alpha+1}$ t.c. $w_p|_{E_\alpha} = p$; per definizione $\operatorname{dom} w_p \subseteq E_{\alpha+1} \subseteq E$ e pertanto w_p e w coincidono sull'intersezione dei domini (che è $\subseteq E_\alpha$); dunque w_p e w sono compatibili e pertanto uguali, perchè W è incompat.

Per concludere la prova è dunque sufficiente mostrare che $\forall \alpha < \mu$ $|E_\alpha|$ e $|W_\alpha|$ sono $\leq \mu$.
Poichè il passo $\alpha = 0$ è ovvio, procedendo per induzione si osservi che $|W_\alpha| \leq \mu$ implica $|E_\alpha| \leq \mu$ (sempre per la regolarità di μ, in quanto $E_\alpha = \bigcup_{w \in W_\alpha} \operatorname{dom} w$). Inoltre se λ è limite e la tesi vale per $\alpha < \lambda$ vale anche per λ. Perciò suppongasi valida per α e si consideri $W_{\alpha+1} = W_\alpha \cup \{w_p \mid \operatorname{dom} p \subseteq E_\alpha, w_p|_{E_\alpha} = p\}$ ricordando che per ogni p siffatto si è scelto esattamente 1 w_p; ma i $p \in P$ t.c. $\operatorname{dom} p \subseteq E_\alpha$ sono al più μ, come mostra il ragionamento seguente: i sottinsiemi di E_α di cardinalità $< \mu$ sono $\mu^{<\mu} = \mu$ (poichè μ è regolare e $2^{<\mu} = \mu$); per ciascuno di essi le funzioni possibili sono esattamente $|Y|^\nu$ ove $\nu < \mu$ e pertanto $\leq \mu^{<\mu} = \mu$.
Dunque $|W_{\alpha+1}| \leq \mu$ e quindi anche $|E_{\alpha+1}| \leq \mu$, da cui la μ^+-saturazione.
Quanto alla ν-chiusura, questa è ovvia per la regolarità di μ. QED

L'indipendenza dell'ipotesi del continuo, ed anzi l'arbitrarietà dell'esponenziazione dei cardinali segue dal seguente

<u>Teorema 5</u>. <u>Sia $\mathcal{M}$ un modello transitivo di ZFC e siano μ, ν cardinali (in $\mathcal{M}$)</u>

<u>tali che $\mu^\nu = \mu$, $2^{<\nu} = \nu$ e ν sia regolare (tutto ciò in $\mathcal{M}$).</u>

<u>Sia</u> $P = \{p \text{ funzioni} \mid \operatorname{dom} p \subseteq \mu \times \nu, \operatorname{Im} p \subseteq \{0,1\}, |\operatorname{dom} p| < \nu\}$,

<u>semiordinato per inclusione inversa (i.e. $p_1 \leq p_2 \iff p_1 \supseteq p_2$).</u>

<u>Allora l'estensione generica $\mathcal{M}[G]$ verifica le seguenti proprietà:</u>

(i) <u>$\mathcal{M}[G]$ ha gli stessi cardinali e le stesse cofinalità di $\mathcal{M}$</u>

(ii) $\mathcal{M}[G] \models 2^\nu = \mu$

<u>Dim</u>: <u>P verifica le ipotesi del lemma 11</u> (con ν in luogo di μ, tenendo conto che $|Y| = 2$) pertanto P è ν^+-saturato,

~~[illegible]~~ è λ-chiuso per ogni $\lambda < \nu$, e quindi λ-distributivo $\forall \lambda < \nu$; (coroll. 8.2)
dunque P conserva tutti i cardinali e le cofinalità ~~[illegible]~~. La (i) è pertanto dimostrata.

Quanto alla (ii) si osservi anzitutto che $M \models |P| = \mu^{<\nu} = \mu$ (vedasi il computo fatto nella dim. del lemma 11) e d'altra parte, se B è il completamento di P (in M), poiché B è ν^+-saturato e P è denso in B si ottiene (in M) $|B| \le |P|^\nu = \mu^\nu = \mu$. Ricordando allora l'esercizio 4 si ha subito

$$(2^\nu)^{M[G]} \le (|B|^\nu)^M = \mu, \text{ ossia } M[G] \models 2^\nu \le \mu$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente dunque trovare in $M[G]$ almeno μ funzioni caratteristiche distinte su ν.

Sia dunque G generico su P e pongasi $\chi = \bigcup G$. Anzitutto si ha che $\chi : \mu \times \nu \to \{0,1\}$ (il ragionamento che segue è sostanzialmente quello di pag 3). In effetti χ è una funzione perché G è un filtro e quindi i suoi elementi sono compatibili, ed il suo dominio è tutto $\mu\times\nu$ in quanto, preso $\alpha \in \mu$ e $\beta \in \nu$ e posto

$D_{\alpha,\beta} = \{p \in P \mid (\alpha,\beta) \in \mathrm{dom}\, p\}$ è immediato verificare che $D_{\alpha,\beta}$ è denso in P e pertanto interseca G, e dunque $(\alpha,\beta) \in \mathrm{dom}\,\chi$.

Dunque per ogni $\alpha \in \mu$ si ha una funzione caratteristica $\chi_\alpha : \nu \to \{0,1\}$ definita da $\chi_\alpha(\beta) = \chi(\alpha,\beta)$; resta da dimostrare che se $\alpha_1 \ne \alpha_2$, allora $\chi_{\alpha_1} \ne \chi_{\alpha_2}$; ma posto $D_{\alpha_1,\alpha_2} = \{p \in P \mid \exists \beta \in \nu \ p(\alpha_1,\beta) \ne p(\alpha_2,\beta)\}$ è immediato verificare che D_{α_1,α_2} è denso in P, dunque interseca G e dunque $\exists\beta$ $\chi(\alpha_1,\beta) \ne \chi(\alpha_2,\beta)$.

QED

Corollario 5.1. L'ipotesi del continuo è indipendente dagli assiomi di ZFC, anzi $2^{\aleph_0}$ può essere un qualunque ~~[illegible]~~ cardinale $\aleph_\alpha$ ad esclusione del caso in cui ~~[illegible]~~ α è limite e $\mathrm{cof}\,\alpha = \aleph_0$.

Dim: Affrontiamo qui nuovamente il problema della consistenza dell'esistenza di insiemi generici: in effetti allo scopo di mostrare la consistenza di $\neg IC$ con ZFC non possiamo assumere l'esistenza di un modello standard numerabile,

che non è dimostrabile in ZFC (ed anzi è dimostrabilmente indipendente da ZFC).
Una possibilità di soluzione è data dal teorema di riflessione, che garantisce l'esistenza di un modello standard per qualunque sentenza valida di ZFC, e pertanto per qualunque sottoinsieme finito di assiomi. Se ora IC fosse dimostrabile in ZFC sarebbe conseguenza di un ~~insieme~~ finito di assiomi Σ, di e pertanto vera in ogni modello di Σ (e di Σ esistono modelli standard, quindi anche numerabili, quindi anche transitivi e numer.)
Ora dal teorema 5 discende la validità di

(*) $\forall M \, \forall G (M \models ZFC \land G \subseteq P \land G \text{ } M\text{-generico} \rightarrow M[G] \models \sim IC)$

ove si deve supporre di aver scritto in luogo di P la sua definizione in (data nell'enunciato del teorema) nel caso $\nu = \aleph_0$ e $\mu > \aleph_1$ (definizione in M, naturalmente)
Un'accurata analisi della prova del teorema 5 mostra che (pur tenendo conto della necessità di definire P) non si utilizzano in M tutti gli assiomi di ZFC, ma solamente un insieme finito e così pure in $M[G]$; sia allora T l'insieme degli assiomi effettivamente necessari (o in M o in $M[G]$): ciò che si è in realtà dimostrato è dunque

(**) $\forall M \forall G (M \models T \land G \subseteq P \land G \text{ } M\text{-generico} \land M[G] \models T \rightarrow M[G] \models \sim IC)$

Ma anche nel dimostrare il teorema 4, se anziché $M[G] \models ZFC$ si desidera solo dimostrare che $M[G] \models T \cup \Sigma$ occorre utilizzare in M soltanto un insieme finito di assiomi U, e quindi si ottiene in luogo del teorema 4 la

(†) $\forall M \, \forall G (M \models U \land G \subseteq P \land G \text{ } M\text{-generico} \rightarrow M[G] \models T \cup \Sigma)$

Ma allora se M è un modello transitivo numerabile di $U \cup T$ (certamente esistente per il principio di riflessione), si ottiene la conclusione assurda che in $M[G]$ sono validi gli assiomi Σ ed anche $\sim IC$, e d'altra parte in questo caso $M[G]$ esiste senz'altro perché M è numerabile.

Questa via, alquanto macchinosa, può però essere evitata utilizzando il modello L dei costruibili, e tenendo presente che le definizioni di P (e di $B = \hat{P}$) sono

da considerarsi allora in L; si è visto allora (Lemma 3), che posto $\mathcal{D} = \mathbb{P}^L(B)$ si ha $\quad \|\mathbb{G}$ è un ultrafiltro $\check{\mathcal{D}}$-completo su $\check{B}\| = 1 \quad$ (in L^B).
Ora però $\|x \in L \wedge x \subseteq \check{B} \to x \in \check{\mathcal{D}}\| = 1$ (in V^B); pertanto, poiché la definizione di P (e di B) è assoluta (in questo caso, come in tutti quelli simili), si ha $\quad \|\mathbb{G}$ è un ultrafiltro $\mathcal{P}(\check{B})$-completo su $\check{B}\| = 1 \quad$ (in L^B)
Pertanto è consistente con ZFC l'asserzione
"Esiste un ultrafiltro L-completo su B^L"
che ovviamente equivale alla consistenza dell'esistenza di un insieme generico su P (operando nel modello L).

Quanto all'ultima asserzione si osservi che, poiché in L vale IGC, se α non ha cofinalità ω si ha $\aleph_\alpha'^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ in quanto cof $\aleph_\alpha > \aleph_0$.

QED

Corollario 5.2 L'ipotesi generalizzata del continuo è indipendente non solo dagli assiomi di ZFC, ma anche dall'ulteriore assunzione della sua validità sotto un cardinale prefissato: è coerente con ZFC assumere che sia $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \quad \forall \alpha < \eta$ e $2^{\aleph_\eta} = \aleph_{\eta+\delta}$, purché $\aleph_\eta$ sia regolare e cof $\aleph_{\eta+\delta} > \aleph_\eta$ (ad es. η e δ successori).

Dim: E' sufficiente porsi nel modello L in cui IGC è valida, ed applicare il teorema 5 scegliendo $\nu = \aleph_\eta$, $\mu = \aleph_{\eta+\delta}$.

Un altro classico uso delle estensioni generiche è il cosiddetto "collasso" di cardinali, ossia la possibilità di rendere minore la cardinalità di qualche ordinale.

Il seguente teorema è il più immediato dei possibili tipi di collasso:

<u>Teorema 6</u>. <u>Sia</u> M <u>un modello transitivo di</u> ZFC, <u>sia</u> ν <u>un cardinale</u> (<u>in</u> M) <u>e sia</u> $\mu < \nu$ <u>un cardinale regolare</u> (<u>in</u> M). <u>Si definisca</u>

$$P = \{ p \text{ funzioni} \mid \operatorname{dom} p \subseteq \mu,\ \operatorname{Im} p \subseteq \nu,\ |\operatorname{dom} p| < \mu \}$$

<u>semiordinato per inclusione inversa</u>, <u>e sia</u> $M[G]$ <u>l'estensione generica di</u> M <u>mediante un insieme</u> M-<u>generico su</u> P. <u>Allora</u>:

(i) <u>Ogni cardinale</u> (<u>in</u> M) $\leq \mu$ <u>rimane un cardinale in</u> $M[G]$

(ii) $M[G] \models |\nu| = \mu$

(iii) <u>Se</u> $M \models \nu^{<\mu} = \nu$, <u>allora ogni cardinale</u> (<u>in</u> M) $> \nu$ <u>rimane un cardinale in</u> $M[G]$.

<u>Dim</u>: In modo esattamente analogo al precedente si può dimostrare che $f = \bigcup G$ è una funzione che applica μ su ν ed è surgettiva, da cui $M[G] \models |\nu| \leq |\mu|$.
D'altra parte P è λ-chiuso per ogni $\lambda < \mu$ e quindi λ-distributivo; pertanto tutti i cardinali fino a μ (e compreso μ, vedi dim. precedente) sono conservati in $M[G]$: questo dà le (i) e (ii).
Se poi (in M) $\nu^{<\mu} = \nu$, allora (sempre come nella dim. prec.) $|P| = \nu$ e quindi $\operatorname{sat} P \leq \nu^+$, da cui segue la (iii).

Q.E.D.

<u>Corollario 6.1</u> <u>E' consistente con</u> ZFC <u>che un qualunque cardinale prefissato in</u> L <u>sia numerabile</u>,

E' anche consistente assumere che si abbia

$$\aleph_\gamma^L = \aleph_\gamma \text{ per } \gamma \leq \alpha+1 \quad e \quad \aleph_{\beta+\delta}^L = \aleph_{\alpha+\delta} \text{ per } \delta > 1$$

ove $\alpha < \beta$ sono ordinali qualsiasi.

La dimostrazione è identica a quella dei corollari precedenti; osserviamo invece che, anche senza utilizzare L, è possibile dimostrare ~~l'indipendenza~~ la non contraddittorietà dell' ipotesi del continuo: basta infatti porre $\mu = \aleph_1$, $\nu = 2^{\aleph_0}$ nel teorema 6 per ottenere (ricordando anche Coroll 8.1 (iv)) $\mathfrak{M}[G] \models 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, da cui

Corollario 6.2 L'ipotesi del continuo è consistente con ZFC.

Si osservi invece che il metodo esposto non è abbastanza potente per collassare tutti i cardinali al di sotto di un cardinale dato, ad esempio per ottenere $\aleph_1 = \aleph_\alpha^L$ ove α è un ordinale limite: per far ciò è necessario utilizzare nozioni di forcing che, per il momento, non tratteremo.

Altri risultati ed osservazioni, in particolare concernenti i casi esclusi dalle ipotesi dei teoremi 5 e 6 (ad es. μ e ν singolari, ovvero $2^{<\nu} \neq \nu$ o $\nu^{<\mu} \neq \mu$) verranno in parte discussi negli esercizi seguenti.

Il più generale problema dell'arbitrarietà "globale" della funzione 2^ν per ν regolare, che è oggetto del noto teorema di Easton, non potrà essere affrontato qui neppure "localmente" (cioè per un insieme di ν regolari): ci si contenti della sua validità "puntuale", come mostrato dal teorema 5.

Esercizio 6 Si dimostri che la nozione di forcing del teorema 5 aggiunge ad M sottoinsiemi di ν nessuno dei quali è già in M.
In particolare, già la nozione di forcing
$$P = \{p \text{ funzioni} \mid \operatorname{dom} p \subseteq \nu,\ \operatorname{Im} p \subseteq \{0,1\},\ |\operatorname{dom} p| < \nu\}$$
aggiunge a ν un nuovo sottoinsieme, mentre conserva $\mathcal{P}(\lambda)\ \forall \lambda < \nu$.
Se ne deduca che $V \neq L$ è consistente con ZFC, anche se a questo si aggiunge $V_\alpha = L_\alpha$ per un arbitrario insieme di ordinali α, e anche IGC.
[Si consideri l'insieme denso $D_\chi = \{p \in P \mid \exists \alpha \in \operatorname{dom} p \text{ t.c. } p(\alpha) \neq \chi(\alpha)\}$ ove χ è un'arbitraria funzione caratteristica di un sottoinsieme di ν in M.
Per quanto concerne l'ultima asserzione, si tenga presente anche il fatto che due modelli transitivi di ZFC coincidono se hanno gli stessi insiemi di ordinali.
Infine l'aggiunta di un solo sottoinsieme di ω, ad es., non altera il valore di 2^ν.]

Esercizio 7 Si dimostri che se, nelle notazioni del teorema 5, μ non verifica $\mu^\nu = \nu$, si ottiene comunque $(2^\nu)^{M[G]} = (\mu^\nu)^M$
[Si ricordi che comunque $M[G] \models 2^{\nu,\nu} = 2^\nu$, nonché l'esercizio 4]

Esercizio 8 Si dimostri che se ν è singolare, sia la nozione di forcing del teorema 5, sia quella dell'esercizio 6, collassano ν su $\operatorname{cof} \nu$.
Si dimostri che il medesimo risultato si ottiene anche con la nozione di forcing del teorema 6 (ove, ben inteso, è μ che collassa su $\operatorname{cof} \mu$)
[Sia x il sottoinsieme di ν aggiunto dal P dell'eserc. 6 (i.e. $x = (\cup G)^{-1}(\{1\})$. Se $\operatorname{cof} \nu < \nu$ sia $\{\nu_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ una successione crescente di cardinali t.c. $\sup \nu_\alpha = \nu$. Si dimostri anzitutto che $\forall \gamma < \nu\ \forall p \in P\ \exists q \in P\ q \leq p$ ed $\exists \alpha < \operatorname{cof} \nu$ t.c. $\operatorname{dom} q \supseteq \nu_{\alpha+1} \smallsetminus \nu_\alpha$ e il tipo d'ordine di $\{\delta \in \nu_{\alpha+1} \smallsetminus \nu_\alpha \mid q(\delta) = 1\}$ sia esattamente $\nu_\alpha + \gamma$.
Se ne deduca che risulta definita $\forall \gamma < \nu$ la funzione $g(\gamma) = \min\{\alpha \mid \nu_{\alpha+\gamma}$ è il tipo d'ord. di $x \cap (\nu_{\alpha+1} \smallsetminus \nu_\alpha)\}$.
Poiché g è iniettiva ne segue la prima affermazione.

Nelle notazioni del teorema 6, se $\mu > \operatorname{cof}\mu$ e se $\{\mu_\alpha \mid \alpha \in \operatorname{cof}\mu\}$ è una successione crescente di cardinali tendente a μ, si dimostri che si può definire un'applicazione iniettiva $h : \nu \to \operatorname{cof}\mu$ ponendo, per $\gamma < \nu$, $h(\gamma) = \min\{\alpha \in \operatorname{cof}\mu \mid \bigcup G|_{\mu_{\alpha+1} - \mu_\alpha}$ vale definitivamente $\gamma\}$]

Esercizio 9 Se, nelle notazioni del teorema 6, $\nu^{<\mu} > \mu$, allora anche $\nu^{\leq\mu}$ è collassato su μ.

[Sia $f = \bigcup G$ e suppongasi, per comodità, che sia $\mu = \lambda^+$; si mostri che è possibile definire un'applicazione iniettiva $g : \{x \in M \mid x \subseteq \nu, |x| = \lambda\} \to \mu$ ponendo
$$g(x) = \min\{\alpha \in \mu \mid \hat{f}((\alpha+\lambda) \setminus \alpha) = x\}$$ (si utilizzi il fatto che $x \in M$ e $\nu^\lambda > \mu$)]

Esercizio 10 Se, nelle notazioni del teorema 5, $2^{<\nu} > \nu$, allora $2^{<\nu}$ è collassato a ν. In effetti se $2^{<\nu} > \nu$, allora anche la nozione di forcing dell'esercizio 6 collassa $2^{<\nu}$ su ν.

[Anzichè procedere a costruire direttamente una funzione del tipo di quelle degli esercizi precedenti, si dimostri che se P_{es} è come all'esercizio 6 e se P_{te} è come al teorema 6 ove si pone $2^{<\nu}$ in luogo di ν e ν in luogo di μ, le algebre di Boole B_{es} e B_{te} risultano isomorfe. Per far questo si consideri $P'_{te} = \{p \in P_{te} \mid \operatorname{dom} p$ è segm. iniz. di $\nu\}$ che è ovviamente denso in P', e si trovi un sottinsieme P'_{es} di P_{es} che sia isomorfo a P'_{te} (si utilizzi il fatto che ogni $p \in P_{es}$ ha $2^{<\nu}$ possibili estensioni a 2 a 2 incompatibili)]