Sommario

In questo documento propongo tre dimostrazioni del fatto che il prodotto di spazi connessi è connesso. Non sono riuscito ad arrivare in fondo, ci sono domande e "pezzi che mancano". Scopo del documento è proprio quello di chiedere delucidazioni fornendo un contesto. Svolgimento e formattazione in LaTeX a cura di Andrea Marino.

La dimostrazione del seguente teorema è stata lasciata per esercizio in data 13/11/2020

Teorema 1. Sia $\{ X_i \}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici connessi. Allora $X = \prod_{i \in I} X_i$ è connesso

La prima dimostrazione proposta "mima" quella vista a lezione

Dimostrazione 1. Siano $U, V \subset X$ non vuoti, aperti e tali che $U \cup V = X$. Mostriamo che $U \cap V \neq \emptyset$.

Abbiamo dimostrato che le proiezioni su ciascuno dei singoli fattori sono aperte: $\pi_i \colon X \twoheadrightarrow X_i$ è aperta $\forall i \in I$. Dunque $U_i \equiv \pi_i(U), V_i \equiv \pi_i(V)$ sono aperti in X_i, e tali che

$$X_i = \pi_i(X) = \pi_i(U \cup V) = \pi_i(U) \cup \pi_i(V) = U_i \cup V_i$$

per ogni $i \in I$. Ma per ipotesi X_i è connesso $\forall i \in I$. Ne segue che $\forall i \in I \; \exists x_i \in U_i \cap V_i$.

Sia ora $i_0 \in I$ fissato e si fissi (AC) per ciascun $i \in I \setminus \{i_0\}$ $x_i \in U_i \cap V_i$. Consideriamo lo spazio (anzi sottospazio)

$$\tilde{X}_{i_0} = X_{i_0} \times \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} \{x_i\}$$

Osserviamo che dato che $x_i \in U_i \cap V_i$, si ha che $U \cap \tilde{X}_{i_0} \neq \emptyset$.

Analogamente $V \cap \tilde{X}_{i_0} \neq \emptyset$. Siano ora $U' = U \cap \tilde{X}_{i_0}$, $V' = V \cap \tilde{X}_{i_0}$. U', V' sono aperti (in $\tilde{X}_{i_0}$) e non vuoti per quanto detto. Inoltre

$$U' \cup V' = \left(U \cap \tilde{X}_{i_0}\right) \cup \left(V \cap \tilde{X}_{i_0}\right) = (U \cup V) \cap \tilde{X}_{i_0} = X \cap \tilde{X}_{i_0} = \tilde{X}_{i_0}$$

Ma $\tilde{X}_{i_0}$ è connesso in quanto omeomorfo a X_{i_0} per quanto visto a lezione. Di conseguenza

$$\emptyset \neq U' \cap V' = \tilde{X}_{i_0} \cap U \cap V \subseteq U \cap V$$

Che è quanto si voleva mostrare. □

Per quanto riguarda questa dimostrazione, ciò che mi lascia un po' di dubbi riguarda il fatto che $U \cap \tilde{X}_{i_0} \neq \emptyset$. A lezione – nella dimostrazione dell'analogo teorema sul prodotto di due spazi connessi X e Y – è stato detto che se $U' \neq \emptyset$ allora $U \cap (\{x_0\} \times Y) = \emptyset$ ossia $x_0 \notin \pi_X(U)$, che è assurdo. In effetti ciò è molto ragionevole e anche "intuitivo" trattandosi di due spazi.

Ciò che mi chiedo è: questo argomento si può trasportare a infiniti spazi? O succedono cose "strane"? Ma soprattutto, forse mi sto perdendo in un bicchier d'acqua ma non penso di aver capito a fondo il perché il ragionamento sopra esposto regge, anche nel caso di due spazi.

In generale $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Dico questo perché avevo tentato la seguente spiegazione (Stiamo ovviamente supponendo $|I| > 2$):

$$\pi_{\hat{\imath}}\left(U \cap \tilde{X}_{i_0}\right) = \pi_{\hat{\imath}}(U) \cap \{x_{\hat{\imath}}\} = \{x_{\hat{\imath}}\} \neq \emptyset \quad \text{per } \hat{\imath} \in I \setminus \{i_0\}$$

Che però non produce una catena di uguaglianze valide (né una catena di contenimenti utile).
Un'altra spiegazione che ho provato a dare è che se non fosse $U \cap \tilde{X}_{i_0} \neq \emptyset$ allora vorrebbe dire che $\forall i \in I \setminus \{i_0\}\ \nexists u \in U \quad u(i) = \pi_i(u) = x_i$. Ma $x_i \in U_i = \pi_i(U)$. Questa invece è valida? È una conclusione lecita? Perché non mi lascia pienamente soddisfatto...

Un dubbio simile lo si ritrova nella seconda dimostrazione

Dimostrazione 2. Abbiamo dimostrato a lezione che le proiezioni su ciascun fattore sono aperte: $\pi_i \colon X \twoheadrightarrow X_i$ è aperta.

Siano $U, V \subseteq X$ aperti, non vuoti, tali che $U \cap V = X$. Per ogni $i \in I$ si ha

$$X_i = \pi_i(X) = \pi_i(U \cup V) = \pi_i(U) \cup \pi_i(V) \equiv U_i \cup V_i$$

Per quanto appena detto U_i e V_i sono aperti di X_i, e sono non vuoti in quanto immagini di insiemi non vuoti. Dunque $U_i \cap V_i \neq \emptyset$ dato che X_i è connesso per ipotesi. Sia dunque, per ogni $i \in I$, $x_i \in U_i \cap V_i$.
Consideriamo ora le fibre degli x_i appena fissati, $\pi_i^{-1}(\{x_i\})$, e intersechiamole tutte: $\bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\{x_i\})$
Osservazione 0.1. Sia $f \in X$ tale che $f(i) = x_i\ \forall i \in I$. Allora

$$\{f\} = \prod_{i \in I} \{x_i\} = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\{x_i\})$$

Dimostrazione. Una tale f esiste per (AC), e anzi $\{f\} = \prod_{i \in I}\{x_i\}$ ossia è possibile identificare f con questo prodotto infinito.[1] Sia ora $g \in \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\{x_i\})$. Allora $\pi_{\hat{\imath}}(g) = g(\hat{\imath}) \in \pi_{\hat{\imath}}\left(\bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(\{x_i\})\right) = \{x_{\hat{\imath}}\}$ per ogni $\hat{\imath} \in I$, ossia $g(\hat{\imath}) = f(\hat{\imath})$. Ma quindi $f = g$.[2] □

Sia dunque f la funzione tale che $f(i) = x_i \quad \forall i \in I$. Si ha dunque $f(i) \in U_i \cap V_i \quad \forall i \in I$. Ma quindi $f \in U \cap V$. □

[1] Sono consapevole che questa identificazione grida vendetta.
[2] Si identificano le due funzioni con il loro grafico. Sono abbastanza sicuro che questa conclusione sia corretta.

Il mio dubbio, in questa dimostrazione, è proprio a proposito della conclusione. Si può concludere che $f \in U$? Vorrei dimostrare che

$$f \in U \iff (x_i = f(i) =)\ \pi_i(f) \in \pi_i(U)$$

Sembra in effetti una cosa molto ragionevole, e in casi particolari tipo sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è vera,[3] ma la generalizzazione "regge"? o ci sono esempi di prodotti infiniti ch giocano cattivi scherzi?
Molto probabilmente, di nuovo, mi sto perdendo in un bicchiere d'acqua. L'implicazione ($\implies$) è ovvia, ma non riesco a trovare un argomento convincente per l'implicazione inversa che non cada in quella diretta. Ad esempio avevo pensato che se $f \notin U$ allora deve esistere $i \in I$ tale che $f(i) \notin \pi_i(u)$. Ma perché?

Non sto però "scommettendo tutto" sul fatto che sia vera: per quanto ragionevole, mi sembra il tipico esempio di proprietà che nasconde un tranello. Forse è così per il fatto che non riesco a dimostrare l'implicazione, ma neppure mi è venuta in mente una ragione per cui le cose potrebbero "andare storte" per così dire. Dunque eccomi a chiedere delucidazioni.

La terza dimostrazione l'ho trovata in rete a questo indirizzo, la riporto qui per essere sicuro di averla compresa bene.

Dimostrazione 3. Abbiamo dimostrato che le proiezioni su ciascun fattore sono aperte: per ogni $i \in I$, $\pi_i \colon X \twoheadrightarrow X_i$ è aperta.

Siano $U, V \subset X$ aperti disgiunti non vuoti che partizionano X: $U \cap V = X$, $U \cap V = \emptyset$, e $U, V \neq \emptyset$. Ora, U e V sono unione di aperti di base: ricordiamo che un aperto di base è della forma $\prod_{i \in I} B_i$ dove $B_i = X_i$ a eccezione di un numero finito di indici (per i quali $B_i \subseteq X_i$ è aperto). Ne segue che $\pi_i(U) = X_i$ a eccezione di una quantità finita di indici; ed idem dicasi per V.

Dunque c'è solo una quantità finita di indici per i quali le proiezioni di U e V lungo il fattore corrispondente nel prodotto possono differire.[4] Esistono quindi elementi di U e di V che differiscono in corrispondenza di una quantità finita di indici.

Vogliamo ora mostrare che esistono due funzioni, l'una in U e l'altra in V, che differiscono solo e soltanto in corrispondenza di uno e un solo indice. Siano a tal fine $u \in U$ e $v \in V$, per una quantità finita di indici $i_1, \dots, i_n$ si ha $\pi_{i_\bullet}(u) \neq \pi_{i_\bullet}(v)$. Sia ora u' la funzione ottenuta, da u, cambiando il valore di $u(i_t)$ e ponendolo uguale a $v(i_t)$. Dato che U e V coprono tutto X si ha che $u' \in V$ oppure $u' \in U$. Se appartiene a V allora u, u' sono le funzioni cercate. Altrimenti ripetiamo il procedimento su u' e v: le due funzioni differiscono

[3] Spero di non star prendendo un granchio. Sarà vero in generale per prodotti finiti?

[4] La dimostrazione che ho trovato va un po' veloce in questa parte. Per concludere che effettivamente lo fanno mi pare di intravedere un argomento simile a quello visto nelle altre due.

solo e soltanto in corrispondenza di i_j con $j \in I_n \setminus \{t\}$.[5]
Di conseguenza $\exists u \in U$, $\exists v \in V$, $\exists \hat{\imath} \in I \quad u(i) \neq v(i) \iff i = \hat{\imath}$.

Consideriamo l'indice $\hat{\imath} \in I$ tale che valga la proprietà appena vista. Adesso vogliamo immergere $X_{\hat{\imath}}$ in X come visto a lezione. Fissiamo (AC) $u(i) = \pi_i(u) \in X_i \ \forall i \in I \setminus \{\hat{\imath}\}$, e sia

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & X_{\hat{\imath}} & \hookrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & f \end{array}$$

con f tale che $f(\hat{\imath}) = x$, $f(i) = u(i) \ \forall i \in I \setminus \{\hat{\imath}\}$.

Osservazione 0.2. ρ è un'inversa destra di $\pi_{\hat{\imath}}$, dato che $\pi_{\hat{\imath}} \circ \rho\,(x) = x \ \forall x \in X_{\hat{\imath}}$ e quindi $\pi_{\hat{\imath}} \circ \rho = \mathrm{Id}_{X_{\hat{\imath}}}$

Osservazione 0.3. Si ha che $\rho \circ \pi_{\hat{\imath}}\,(u) = u$. Infatti $\rho \circ \pi_{\hat{\imath}}\,(u) = \rho(u_{\hat{\imath}}) \equiv f$ e si ha che $f(\hat{\imath}) = u(\hat{\imath})$ e $f(i) = u(i)$ per costruzione. Ma quindi $f = u$.

Per quanto visto a lezione, ρ è un'immersione topologica e in particolare è continua.
Ma $\rho^{-1}\,(U)$ e $\rho^{-1}\,(V)$ sono aperti, disgiunti, non vuoti che ricoprono $X_{\hat{\imath}}$. Ma questo è assurdo, dato che per ipotesi $X_{\hat{\imath}}$ è connesso. □

A ben guardare, questa dimostrazione non è poi così diversa dalle altre due. Non è chiarissimo però che ruolo gioca l'indice $\hat{\imath}$: era davvero importante costruire un elemento di U e uno di V che differiscono solamente in corrispondenza di tale indice?

È questa la dimostrazione che avevate in mente come soluzione dell'esercizio? Almeno vi somiglia abbastanza? Se così non fosse – a questo punto – sarei curioso di leggere quella che ci avreste proposto.

[5]Notazione: $I_n = \{1, \ldots, n\}$