ANALISI MAT. 2

M. NOVAGA

LEZIONI 1 e 2

23/9/2020

SPAZI METRICI

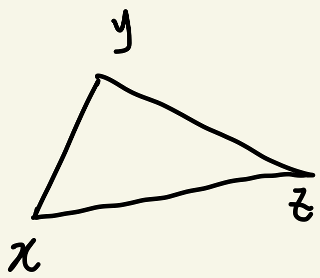
(X, d) SPAZIO METRICO SE

X INSIEME

$d : X \times X \to [0, +\infty)$ DISTANZA, CIOÈ

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \geq 0 \quad \forall x, y$
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad \forall x, y, z$

DIS. TRIANGOLARE



ESEMPIO:

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ $\quad |x| = \left(\sum_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ $\quad \|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\quad p \geq 1$

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (*)$$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

(*) Sia x t.c. $\|x\|_\infty = |x_i|$

$|x_i| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \leq \left(n\,|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to |x_i|$

OSS: (X, d) SP. METRICO

$Y \subseteq X \Rightarrow (Y, d)$ SP. METRICO

APERTI, CHIUSI, COMPATTI

(X, d) SP. METRICO

$E \subseteq X$

- E **APERTO** SE $\forall x \in E \ \exists r > 0$ T.C. $B_r(x) \subseteq E$, DOVE

$$B_r(x) = \{ y : d(x,y) < r \}$$ PALLA,

CIOÈ E È **INTORNO** DI x

- E È **CHIUSO** SE $X \setminus E$ È APERTO

PROP: E CHIUSO $\iff$ DATA $x_n \to x$ CON $x_n \in E$ e $x \in X$ SI HA $x \in E$.

·) $E \subseteq X$ **COMPATTO** (PER SUCCESSIONI)

$\forall x_n \in E$ SUCCESSIONE

$\exists x_{n_k}$ SOTTOSUCCESSIONE T.C.

$x_{n_k} \to x \in E$, CIOÈ

$$\lim_k d(x_{n_k}, x) = 0.$$

PROP: IN GENERALE

E CPT $\Rightarrow$ E CHIUSO E LIMITATO

IN $\mathbb{R}^n$ VALE ANCHE

E CHIUSO E LIMITATO $\Rightarrow$ E CPT

(BOLZANO - W.)

IN GENERALE PUÒ $\exists\, E \subseteq X$

CHIUSO, LIMITATO, NON CPT.

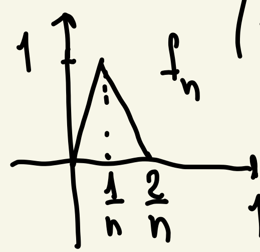
ES: $X = C([a,b]) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ CONT.}\}$

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

(X,d) È UNO SP. METRICO

$\overline{B_1(0)} = \{f\in X : \|f\|_\infty \leq 1\}$, $[a,b]=[0,1]$,

CHIUSO E LIMITATO, NON CPT.



$(n\geq 2)$

$f_n(x)\to 0 \quad \forall x$

$d(f_n,0) = \|f_n\|_\infty = 1$

UNA DEF. EQUIVALENTE DI CPT.

(NON EQUIV. IN SPAZI PIÙ GENERALI, CIOÈ GLI SP. TOPOLOGICI)

È QUELLA PER RICOPRIMENTI

DEF:

$E \subseteq X$ CPT. SE

$\forall \{V_i\}_{i \in I}$ RICOPRIMENTO DI E,

CIOÈ $E \subseteq \bigcup_i V_i$, CON V_i APERTO,

$\exists$ SOTTORICOPRIMENTO FINITO, CIOÈ

$\exists V_1, \dots, V_n \in \{V_i\}_{i \in I}$ T.C.

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_k .$$

COMPLETEZZA

DEF: $x_n \in X$ È DI CAUCHY SE $\forall \varepsilon$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ T.C. $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m > n_\varepsilon$.

OSS: SE $x_n \to x$ $\Rightarrow$ x_n È DI C.

DEF: X È COMPLETO SE x_n DI C. $\Rightarrow$ x_n È CONVERGENTE

OSS: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ SONO COMPLETI, $\mathbb{Q}$ NON È COMPLETO

X SP. METR. COMPLETO e $E \subseteq X$ CHIUSO $\Rightarrow$ E COMPLETO

ES: $\left(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ È COMPLETO

$\left(\{f \in R(a,b)\}, \|\cdot\|_{L^p}\right)$ NON È COMPLETO *

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

* MA LO DIVENTA SE SI CONSIDERANO LE FUNZIONI LEBESGUE INTEGRABILI

TEO DELLE CONTRAZIONI

(BANACH-CACCIOPPOLI)

X, Y SP. METRICI

$f: X \to Y$ È <u>L-LIPSCHITZIANA</u>

$L \in (0, +\infty)$

SE $d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$

$f: X \to X$ SI DICE <u>CONTRAZIONE</u>

SE f È L-LIP. CON $L < 1$.

<u>TEO</u> X SP METRICO COMPLETO

f CONTRAZIONE $\Rightarrow$

$\exists!\ \bar{x} \in X$ T.C. $\boxed{f(\bar{x}) = \bar{x}}$

INOLTRE $\forall x_0 \in X$ LA SUCCESSIONE $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \end{cases}$

CONVERGE A $\bar{x}$.

DIM:

1. $\bar{x}$ È UNICO. INFATTI SE $\exists\, \bar{y}$ T.C.

$$f(\bar{y}) = \bar{y} \implies d(\bar{x}, \bar{y}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{y}))$$

$$\leq L \cdot d(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\implies \bar{x} = \bar{y}$$

2. PER L'ESISTENZA, SIA x_n LA SUCC. PER RICORRENZA, VEDIAMO CHE È DI CAUCHY.

IN TAL CASO $\exists\, \bar{x} = \lim x_n$

E, PASSANDO AL LIMITE IN $x_{n+1} = f(x_n)$,

SI OTTIENE $\bar{x} = f(\bar{x})$.

VEDIAMO CHE È DI C., $m > n > 0$,

$$d(x_n, x_m) \leq L\, d(x_{n-1}, x_{m-1}) \dots$$

$$\leq L^n\, d(x_0, x_{m-n}).$$

$$d(x_0, x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1})$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} L^i\, d(x_0, x_1) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-L}.$$

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(x_0, x_1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow x_n$ È DI CAUCHY.

$\square$

OSS: UNA FUNZ. LIP., IN PART. UNA CONTRAZIONE, È SEMPRE CONTINUA.

SPAZI NORMATI E SPAZI DI BANACH

X SP. VETTORIALE (SU $\mathbb{R}$)

$\| \ \| : X \to [0, +\infty)$ È UNA **NORMA** SE

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x$ E $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|-x\| = \|x\| \quad \forall x$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (DIS. TRIANGOLARE)

$(X, \|\cdot\|)$ SI DICE **NORMATO**

ED È UNO SP. METRICO PONENDO

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

OSS: LA DIS. TRIANGOLARE EQUIVALE ALLA CONVESSITÀ DELLA FUNZ. $\|\cdot\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ SP. NORMATO SI DICE

SPAZIO DI BANACH SE È COMPLETO.

<u>ES:</u> $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ BANACH

$(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ BANACH.

ESEMPIO:

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ $\quad \|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \geq 1 \\ \max\limits_i |x_i| & p = +\infty \end{cases}$

$\|\cdot\|_p$ È UNA NORMA EQUIVALENTE A $|\cdot|$

DEF: X È UNO SP. VETT. e

$|\cdot|_1, |\cdot|_2$ SONO NORME SU X,

$|\cdot|_1$ È EQUIVALENTE A $|\cdot|_2$ SE $\exists C > 0$

T.C. $|x|_1 \leq C|x|_2$ e $|x|_2 \leq C|x|_1$

① $\|\cdot\|_p$ È UNA NORMA

VA VERIFICATA LA DIS. Δ

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

LEMMA (DIS. DI HÖLDER)

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ CIOÈ $p' = \frac{p}{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}$$

APPLICHIAMO YOUNG $\left(ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \right)$

A $$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}}$$

$$\frac{\sum_i |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_i |x_i+y_i|^p = \sum_i |x_i+y_i|^{p-1} \cdot |x_i+y_i|$$

$$\leq \sum_i |x_i+y_i|^{p-1}\left(|x_i| + |y_i|\right)$$

$$\underset{\text{(HÖLDER)}}{\leq} \left(\sum_i |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$$

$$= \|x+y\|_p^{p-1} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$$

$$\Longrightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

IL CASO $p=+\infty$ PER ESERCIZIO

② PIÙ IN GENERALE:

TUTTE LE NORME SU $\mathbb{R}^n$

SONO EQUIVALENTI

INFATTI SIA $\|\cdot\|$ UNA NORMA SU $\mathbb{R}^n$

E SIA $|\cdot|$ LA NORMA EUCLIDEA

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{|x|} \cdot |x| \right\| = \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \cdot |x| \quad \forall x \neq 0$$

$$\frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \doteq \{ y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1 \}$$

PER WEIERSTRASS

$$\|x\| \leq \left(\max_{S^{n-1}} \|\cdot\| \right) |x|$$

$$\|x\| \geq \left(\min_{S^{n-1}} \|\cdot\| \right) |x|$$

$\exists C$ T.C. $\frac{1}{C}|x| \leq \|x\| \leq C|x| \quad \forall x.$

OSS: NON È VERO SU SPAZI VETT.

DI DIM. INFINITA

ES: $X = C([0,1])$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|\,dx$$

$$\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$$

SONO NORME **NON** EQUIV. !

$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ MA

$\nexists C$ T.C. $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1 \quad \forall f$

DEF: $(X, |\ |_X)$ E $(Y, |\cdot|_Y)$

SP. DI BANACH SONO **ISOMORFI**

SE $\exists\ f: X \to Y$ LINEARE E BIGETTIVA

T.C. $|f(x)|_Y \leq c|x|_X$ E

$|f^{-1}(y)|_X \leq c|y|_Y$

$\forall x \in X$ e $y \in Y$

FUNZIONI CONTINUE

X, Y SP. METRICI

$f: X \to Y$ È CONTINUA IN $x_0 \in X$

SE $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0) \quad \forall x_n \to x_0$

OVVERO $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ T.C.

$$f\left(B_\delta(x_0)\right) \subseteq B_\varepsilon\left(f(x_0)\right).$$

X SP. METRICO COMPATTO

$f: X \to \mathbb{R}$ È CONTINUA

TEO (WEIERSTRASS)

$\exists \max_X f, \min_X f$

TEO (HEINE-CANTOR)

f È UNIF. CONTINUA, CIOÈ

$\forall \varepsilon \; \exists \delta$ T.C.

$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

LEMMA DI BAIRE

X SP. METRICO COMPLETO, $X \neq \emptyset$,

① $C_n \subseteq X$ SUCC. DI CHIUSI A PARTE INTERNA VUOTA $\left(\mathring{C}_n = \emptyset \right)$

$\Rightarrow \bigcup_n C_n$ HA PARTE INTERNA VUOTA,

IN PARTICOLARE $\bigcup_n C_n \neq X$

② $U_n \subseteq X$ SONO APERTI DENSI, CIOÈ $\overline{U_n} = X$, $\Rightarrow$

$\bigcap_n U_n$ È DENSA

① $\Leftrightarrow$ ② PASSANDO AL COMPLEMENTARE

DIM. VEDIAMO 2 E

MOSTRIAMO CHE $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$

$x_1 \in U_1 \Rightarrow \exists r_1$ T.C. $B_{r_1}(x_1) \subseteq U_1$

$\exists\, x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2$

$\exists\, r_2$ T.C. $B_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1}(x_1) \cap U_2 \subseteq U_1 \cap U_2$

$\vdots$

$\exists x_k, r_k$ T.C. $B_{r_k}(x_k) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} U_j$

POSSO SUPP. $r_k \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \forall\, k < n < m$

$x_n, x_m \in B_{r_k}(x_k) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow x_k$ È DI CAUCHY

$\Rightarrow x_k \to \bar{x} \in \bigcap_n U_n$

SUPP. X ASSURDO CHE $\bigcap U_n$ NON SIA DENSA,

CIOÈ $\overline{\bigcap U_n} \subsetneq X \Rightarrow$

$\exists\ \overline{B_\rho(x)} \subseteq X \setminus \overline{\bigcap_n U_n}$.

SE GUARDO LO SP. METRICO COMPLETO

$X' = X \cap \overline{B_\rho(x)}$ E $U_n' = U_n \cap B_\rho(x)$

APERTI DENSI IN X'

AVREI $\bigcap U_n' = \left(\bigcap_n U_n\right) \cap B_\rho(x) = \emptyset$,

ASSURDO PER QUANTO

VISTO PRIMA.

COR: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in F_\sigma$, CIOÈ SE X ASSURDO

$\exists\, C_n$ SUCC. DI CHIUSI DI $\mathbb{R}$ T.C.

$\bigcup C_n = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

SE ESISTESSE $\Rightarrow$ $\mathring{C}_n = \emptyset \quad \forall n$

$$\mathbb{R} = \left(\bigcup_n C_n\right) \cup \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}\right)$$

CONTRADDICE LEMMA DI BAIRE.

COR: X SP. VETT. DI DIMENSIONE NUMERABILE, CIOÈ $\exists\, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ BASE DI X, E $\|\cdot\|$ NORMA SU X

$\Rightarrow (X, \|\cdot\|)$ NON È COMPLETO

INFATTI $X_n = \langle v_1, \dots v_n \rangle < X$

È UN CHIUSO CON $\mathring{X}_n = \phi$

E $\bigcup_n X_n = X$.

SE X FOSSE COMPLETO

AVREI UNA CONTRADDIZIONE.

ES: $\left(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$

È UNO SP. DI BANACH

MA $C([a,b])$ COME SP. VETT.

HA DIMENSIONE PIÙ CHE NUMERABILE.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE

$\left(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty\right)$ È UN BANACH

OSS: $f_n, f \in C([a,b])$

$f_n \to f \iff$

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

SI DICE CHE f_n CONVERGE

UNIFORMEMENTE A f,

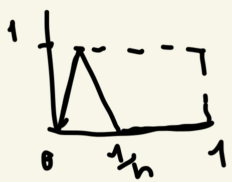
CIOÈ $\forall \varepsilon \; \exists n_\varepsilon$ T.C.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in [a,b].$$

$f_n \to f$ UNIFORM. $\Rightarrow f_n(x) \to f(x) \;\; \forall x$

CONV. PUNTUALE

MA $\not\Leftarrow$

$f_n =$ 

$\longrightarrow f \equiv 0$ PUNTUALMENTE

NON UNIF.