ANALISI 2

NOVAGA

LEZIONE 3

25/9/2020

FUNZIONI $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

FUNZIONI CONTINUE

f È CONTINUA IN x_0 $\iff$

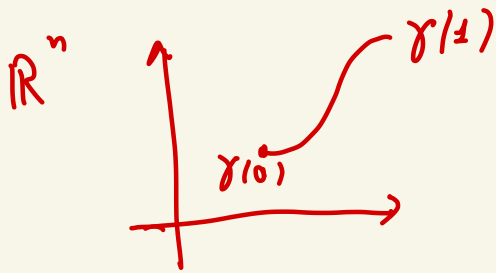
$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0) \qquad \forall x_n \to x_0$$

NON È SEMPRE IMMEDIATO VERIFICARE CHE f È CONTINUA

<u>OSS:</u> f CONINUA

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ CURVA (CONTINUA)

$\Rightarrow f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ CONTINUA



IN PARTICOLARE È CONTINUA

LA RESTRIZIONE DI f

A TUTTE LE RETTE

$$g(t) = f(x_0 + tv) \qquad t \in \mathbb{R},\ v \neq 0$$

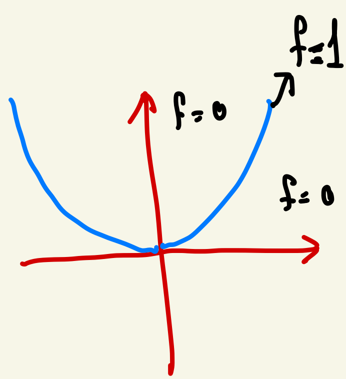
OSS: $\exists\, f$ NON CONT. IN x_0

MA T.C. $g(t) = f(x_0 + tv)$

È CONT. IN $t = 0 \quad \forall v \neq 0$.

ES: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y \neq x^2 \\ 0 & y = x = 0 \\ 1 & y = x^2 \neq 0 \end{cases}$$



PROP: f CONT. IN x_0 $\Longleftrightarrow$

$f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ È CONT. IN $t = 0$

$\forall\ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ CURVA T.C.

$\gamma(0) = x_0$.

ESEMPIO: SIA $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

PER QUALI α È CONTINUA IN $(0,0)$

DOBBIAMO CALCOLARE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0$$

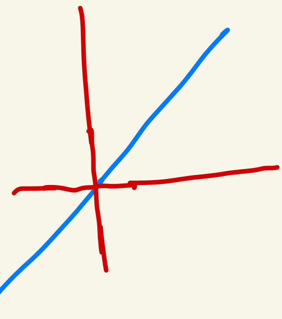
VEDIAMO LA RESTRIZIONE

A $\gamma(t) = (t, 0)$

$$f\circ\gamma(t) = \frac{t \cdot 0}{t^{2\alpha}} = 0$$ CONT.

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma(t) = 0$$

$$\gamma(t) = (t, t)$$



$$f\circ\gamma(t) = \frac{t^2}{2^\alpha t^{2\alpha}} = 2^{-\alpha} t^{2-2\alpha}$$

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma = 0 \iff 2 - 2\alpha > 0$$

CIOÈ $\boxed{\alpha < 1}$

PER $\alpha \geq 1$ f NON È CONT. IN $(0,0)$

$\alpha < 1$ SAREBBE SUFFICIENTE

LA STIMA

$$\boxed{|f(x,y)| \leq g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

CON $\lim_{t \to 0} g(t) = 0$

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{t\to 0} g(t) = 0$$

$$(x,y) \to (0,0) \iff \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1-\alpha}$$

$$g(t) = \frac{t^{2(1-\alpha)}}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

QUINDI f È CONT. $\iff \alpha < 1$.

ESERCIZI: VEDERE LA CONT. IN $(0,0)$ DELLE FUNZIONI

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x|^\alpha + |y|^\beta} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^2} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATA PARZIALE:

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$x_0 \in A$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

SE $\exists \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t} = \begin{cases} f_{x_i}(x_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \end{cases}$

SI DICE DERIVATA PARZIALE i^a

DI f IN x_0

GRADIENTE:

SE $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ $\forall i$,

IL VETTORE $\underset{\in \mathbb{R}^n}{\nabla f(x_0)} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$

SI DICE GRADIENTE DI f IN x_0

DERIVATA DIREZIONALE:

$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

SE $\exists \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) \\ D_v f(x_0) \end{cases}$

SI DICE DER. DI f IN DIREZIONE v.

PRINCIPIO DI FERMAT

$x_0 \in A$ È UN PUNTO DI MAX / MIN.

LOCALE PER $f \implies$

$\nabla f(x_0) = 0$

(se $\nabla f(x_0)$ ESISTE)

DIM $g_i(t) = f(x_0 + te_i)$

$\Rightarrow g_i$ HA UN MAX/MIN LOCALE IN $t=0 \Rightarrow$

$$g_i'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

OSS: CON LA STESSA DIM. SI HA $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$.

$$\left[\; g_v(t) = f(x_0 + tv) \;\right]$$

DIFFERENZIABILITÀ

f È DIFFERENZIABILE IN $x_0 \in A$

SE $\exists \; v \in \mathbb{R}^n$ T.C.

FUNZIONE LINEARE

$$f(x) = f(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

IN TAL CASO V SI DICE DIFFERENZIALE DI f IN x_0.

OSS: SE f È DIFF. IN $x_0 \Rightarrow$ $\exists \; \nabla f(x_0)$ e $v = \nabla f(x_0)$

INFATTI, PRENDENDO $x = x_0 + t e_i$,

$$f(x_0 + t e_i) = f(x_0) + t v_i + o(t)$$

$$\Rightarrow v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

OSS: f DIFF. IN x_0 $\Rightarrow$

f CONTINUA IN x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x_0) + \nabla(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

$$\underset{\downarrow}{(x-x_0)} \to 0 \qquad \underset{\downarrow}{o(|x-x_0|)} \to 0$$

$$= f(x_0).$$

OSS: INVECE L'ESISTENZA DI $\nabla f(x_0)$ NON GARANTISCE LA CONT. DI f QUINDI NEPPURE LA DIFF.

ES: $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$ MA f NON È CONT.

MORALE: NON È SEMPRE FACILE CAPIRE SE f È DIFF. IN x_0, MA SE LO È ALLORA IL DIFF. È UGUALE AL GRADIENTE QUINDI "FACILE" DA CALCOLARE.

ESERCIZIO: DIRE QUANDO LE FUNZ. DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE SONO DIFF. IN $(0,0)$.

OSS: $\exists$ FUNZ. CON $\frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0 \ \forall v$ NON CONTINUE IN 0

(L'ESEMPIO DELLA PARABOLA)

TEO (DIFFERENZIALE TOTALE)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$x_0 \in A$, SUPP. $\exists \nabla f(x)$ IN $B_r(x_0)$

ED È CONTINUO IN x_0,

CIOÈ $\lim_{x \to x_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall i$,

$\Rightarrow$ f È DIFF. IN x_0.

DIM. DOBBIAMO VEDERE CHE

$$f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)\cdot(x - x_0) \overset{?}{=} o(|x-x_0|)$$

CIOÈ

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

FACCIAMO LA DIM. PER $n=2$

$x_0 \to (x_0, y_0)$ $\qquad$ $x \to (x, y)$

E SCRIVIAMO

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$$

LAGRANGE

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-y_0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right| = 0$$

$$\boxed{\frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x_0-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \leq 1 \qquad \frac{|y-y_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \leq 1}$$

PER LA CONT. DI ∇f IN x_0.

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geq \sqrt{(x-x_0)^2} = |x-x_0|$$