ANALISI 2

LEZIONE 7

NOVAGA

NORMA DI APPLICAZIONI LINEARI

$L: E \to F$ LINEARE E CONTINUA, E, F BANACH

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F \qquad \text{NORMA}$$

$\mathcal{L}(E,F) = \{ L: E \to F \text{ LIN. CONT.}, \|\cdot\| \}$ È BANACH

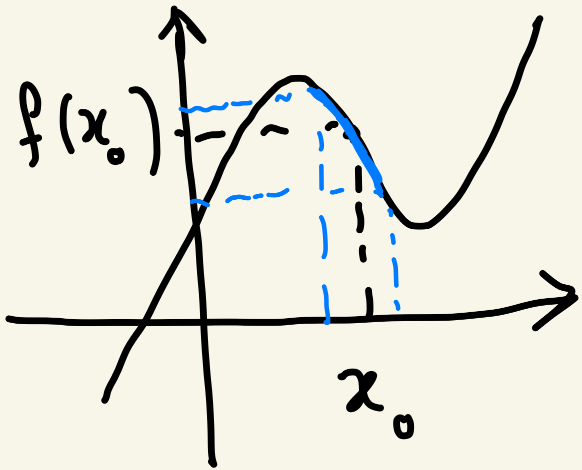
ES: $A \in M_{n,m}$ $\quad A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE $\quad \|A\| = \max_{|x| \leq 1} |Ax|$

OSS: $\|L(x)\|_F \leq \|L\| \cdot \|x\|_E \quad \forall x \in E$

OSS: ANCHE $\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ È UNA NORMA IN $M_{n,m}$

OSS: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1$, $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

f È LOC. INVERTIBILE IN $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$



MENTRE SE $f'(x_0) = 0$ POTREBBE

NON ESSERE INVERTIBILE

TEOREMA (INVERTIBILITÀ LOCALE)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, $x_0 \in \Omega$

$Df(x_0)$ INVERTIBILE (CIOÈ $\det(Df(x_0)) \neq 0$)

$\Rightarrow \exists$ INTORNO APERTO $U \ni x_0$ T.C.

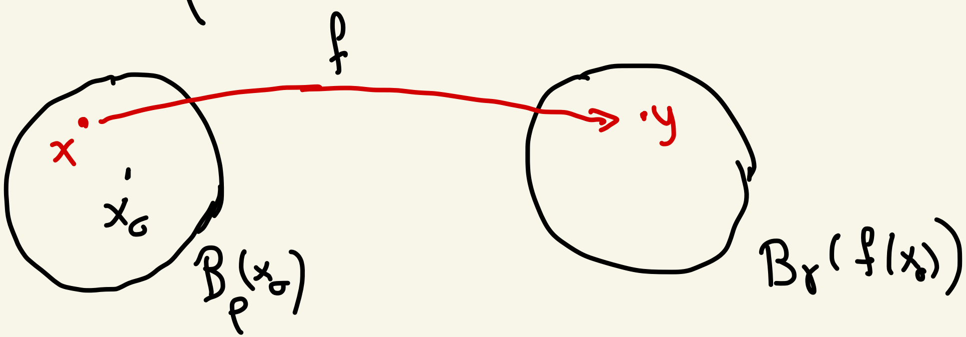
$f|_U : U \to V$ È UN DIFFEOMORFISMO,

CIOÈ È BIGETTIVA E $g = f^{-1} : V \to U$ È C^1.

INOLTRE $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ PER $y = f(x)$.

DIM. SI USA IL LEMMA DELLE CONTRAZIONI.

SIA $\boxed{A = Df(x_0)^{-1}.}$ FISSIAMO $B_\rho(x_0)$ E $B_r(x_0)$, $\rho, r > 0$ CHE SCEGLIEREMO PICCOLI, E SUPP. $B_\rho(x_0) \subseteq \Omega$ E Df È INVERTIBILE IN $B_\rho(x_0)$.



FISSIAMO $y \in B_r(f(x_0))$, CERCHIAMO $x \in B_\rho(x_0)$ T.C. $f(x) = y$.

DEFINIAMO $T : \overline{B_\rho(x_0)} \to \mathbb{R}^n$, $\boxed{T(x) = x + A\left(y - f(x)\right)}$

$T \in C^1$ E $T(x) = x \iff y = f(x)$.

DICO CHE T È UNA CONTRAZIONE PER ρ, r PICCOLI.

SCRIVIAMO

$\|DT(x)\| = \|Id - A\,Df(x)\| \leq 1/2$ PER ρ PICCOLO,

DATO CHE Df È CONT. E,

PER $x = x_0$, $DT(x_0) = 0$ (RICORDIAMO $A = Df(x_0)^{-1}$).

IN PART. $T\big|_{\overline{B_\rho(x_0)}}$ È $\frac{1}{2}$-LIPSCHITZIANA.

VERIFICHIAMO CHE $T : \overline{B_\rho(x_0)} \to \overline{B_\rho(x_0)}$.

$$|T(x) - x_0| \leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0|$$

$$\leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |A(y - f(x_0))|$$

$$\leq \frac{\rho}{2} + \|A\| r \leq \rho$$

SE $r \leq \dfrac{\rho}{2\|A\|}$.

$\Longrightarrow$ T È UNA CONTRAZIONE SU $\overline{B_\rho(x_0)}$

$\Rightarrow \exists!\, x \in \overline{B_\rho(x_0)}$ T.C. $x = T(x)$, CIOÈ

T.C. $y = f(x)$. DEFINISCO $g(y) = x$.

SIA $V = B_r(f(x_0)) \setminus f(\partial B_\rho(x_0))$ INTORNO DI $f(x_0)$

E SIA $U = g(V) \subseteq B_\rho(x_0)$ INTORNO DI x_0.

OSSERVIAMO $g(f(x)) = x \quad \forall x \in U$

VEDIAMO CHE g È CONTINUA IN $y \in V$.

SIA $y_n \to y$ E SIANO $x_n = g(y_n)$ E $x = g(y)$.

VOGLIAMO VEDERE CHE $x_n \to x$.

ABBIAMO $\frac{1}{2}|x-x_n| \geq |T(x)-T(x_n)|$

$$= |x_n + A(y-y_n) - x|$$

$$\geq |x-x_n| - |A(y-y_n)|$$

$$\geq |x-x_n| - \|A\| \cdot |y-y_n|$$

$$\Rightarrow \quad |x-x_n| \leq 2\|A\| \cdot |y-y_n|$$

$\Rightarrow g|_V$ È $2\|A\|$ - LIPSCHITZIANA,

IN PARTICOLARE È CONTINUA.

VERIFICHIAMO CHE $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ CON $x = g(y)$.

SIA $y_n \to y$ E $x_n = g(y_n)$ E CALCOLIAMO

$$\frac{g(y_n) - g(y) - Df(x)^{-1}(y_n - y)}{|y_n - y|} = \frac{x_n - x - Df(x)^{-1}\left(f(x_n) - f(x)\right)}{|y_n - y|}$$

$$= \frac{x_n - x - Df(x)^{-1}\left(Df(x)(x_n - x) + \underbrace{o(|x_n - x|)}_{\in \mathbb{R}^n}\right)}{|x_n - x|} \cdot \frac{|x_n - x|}{|y_n - y|} \leq 2\|A\|$$

$$= Df(x)^{-1}\left(\underbrace{\frac{o(|x_n - x|)}{|x_n - x|}}_{\text{INFINITESIMA}}\right) \cdot \underbrace{\frac{|x_n - x|}{|y_n - y|}}_{\text{LIMITATA}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \implies$$

$Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

OSS: QUESTO È SOLO UN TEOREMA LOCALE,
ANCHE SE $Df(x)$ È INVERTIBILE $\forall x \in \Omega$
NON È DETTO CHE f SIA GLOBALMENTE INV.

ES: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = e^z$ ESP. COMPLESSO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\quad f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

f NON È INIETTIVA $\Rightarrow$ NON È GLOBALMENTE INV.

MA $\det(Df(x,y)) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x > 0 \quad \forall (x,y)$

OSS: LA STESSA DIM. FUNZIONA PER $f: E \to F$ BANACH, FRECHÉT DIFF., CON $Df(x_0)$ INVERT. CON INV. CONTINUA.

DOMANDA: QUALI COND. GARANTISCONO L'INV. GLOBALE?