Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - Foglio di esercizi n.ro 1 del 24/10/2020

(1) Si considerino i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dati da

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [0, 1, 0]\,, \quad P_3 = [0, 0, 1], \quad P_4 = [1, 1, 1]\ ,$$

$$Q_1 = [1, -1, -1], \quad Q_2 = [1, 3, 1]\,, \quad Q_3 = [1, 1, -1], \quad Q_4 = [1, 1, 1]\ ,$$

  (a) Si determini una formula esplicita per la proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.
  (b) Si determinino tutte le rette $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$.

(2) Siano P_1, P_2, P_3 punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale, e sia $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta tale che $P_i \notin r$ per $i = 1, 2, 3$.
  (a) Si mostri che esiste un'unica proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tale che $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$ e $f(r) = r$.
  (b) Si mostri che l'insieme dei punti di fissi di f è dato dall'unione di un punto $M \in r$ ed una retta s con $M \notin s$.

(3) Siano $p \in \mathbb{N}$ un numero primo, $q = p^n$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$, e $\mathbb{K}$ il campo finito $\mathbb{F}_q$.
  (a) Dato $m \in \mathbb{N}$, si calcoli la cardinalità di $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$.
  (b) Dati due punti $P, P' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e due rette $r, r' \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, tali che $P \notin r$ e $P' \notin r'$, si determini quante sono le proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tali che $f(P) = P'$ e $f(r) = r'$.

(4) Siano r_0, r_1 le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione rispettivamente $x_0 - x_1 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$ (dove $[x_0, x_1, x_2]$ sono le coordinate omogenee standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).
  (a) Si mostri che esiste un'unica prospettività $f\colon r_0 \to r_1$ tale che

$$f([1 : 1 : 0]) = [0 : 1 : 1]\,, \qquad f([0 : 0 : 1]) = [1 : 0 : 0]\ .$$

  (b) Si calcoli il centro O della prospettività f appena trovata.

(5) Siano A, B, C, D punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale. Si mostri che i punti

$$L(A, B) \cap L(C, D)\,, \quad L(A, C) \cap L(B, D)\,, \quad L(A, D) \cap L(B, C)$$

non sono allineati.

(6) Siano r, s rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ tali che $r \cap s = \emptyset$, e sia $P \notin r \cup s$. Abbiamo visto a lezione che esiste un'unica retta $l \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ tale che $P \in l$, $l \cap r \neq \emptyset$ e $l \cap s \neq \emptyset$. Si determinino equazioni cartesiane per la retta l nel caso in cui r abbia equazioni

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0$, s abbia equazioni $x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0$, e $P = [0, 1, 0, 1]$.

(7) Sia $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ una proiettività diversa dall'identità. Si mostri che $f^2 = \mathrm{Id}$ se e solo se esistono punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tali che $f(P) = Q$ e $f(Q) = P$.

(8) Siano r_0, r_1, r_2 tre rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non concorrenti (cioè tali che $r_0 \cap r_1 \cap r_2 = \emptyset$).
  (a) Si mostri che esistono infinite proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r_0) = r_1$, $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_0$.
  (b) Sia f una proiettività con le proprietà descritte al punto precedente. Si mostri che $f^3 = \mathrm{Id}$.

(9) Si consideri il morfismo di anelli $\psi\colon \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[t, x_1, \ldots, x_n]$ definito da

$$\psi(f)(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\ .$$

Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Si mostri che f è omogeneo di grado d se e solo se $\psi(f) = t^d \cdot f$. (Una freccia è ovvia; l'altra è stata utilizzata nella dimostrazione del fatto che il risultante rispetto a x_2 di polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è esso stesso omogeneo).

(10) Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso, e sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che $V(\mathcal{C})$ è un insieme infinito.

(11) Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito, e sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus V(\mathcal{C})$ è un insieme infinito.

(12) Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avente equazione ${}^t x A x = 0$, dove A è una matrice simmetrica 3×3 a coefficienti in $\mathbb{C}$ e $x = {}^t(x_0, x_1, x_2)$. Per ogni $P = [v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, indichiamo con $\mathrm{pol}(P)$ la retta di equazione ${}^t v A x = 0$. Inoltre, per ogni $Q \in V(\mathcal{C})$ indichiamo con τ_Q la tangente a $\mathcal{C}$ in Q.
  (a) Si mostri che, se $P \in V(\mathcal{C})$, allora $\mathrm{pol}(P) = \tau_P$.
  (b) Si mostri che, se $P \notin V(\mathcal{C})$, allora

$$\mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C}) = \{Q \in V(\mathcal{C}) \mid P \in \tau_Q\}\ .$$

(13) Siano $P_1, \ldots, P_5$ cinque punti in posizione generale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che esiste un'unica conica proiettiva $\mathcal{C}$ tale che $V(\mathcal{C})$ contiene tutti i punti $P_1, \ldots, P_5$, e che tale conica è non-degenere. Cosa succede se i punti non sono in posizione generale? (*Suggerimento*: fissate un riferimento proiettivo appropriato, e cercate l'equazione della conica usando le coordinate omogenee indotte da questo riferimento.)

(14) (Teorema di Pappo) Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo e siano $A_1, \ldots, A_6$ punti distinti tali che le rette $L(A_1, A_2), L(A_2, A_3), \ldots, L(A_6, A_1)$ siano distinte. Si consideri l'esagono di $\mathbb{P}(V)$ di vertici $A_1, \ldots, A_6$, e si supponga che esistano due rette distinte r e s tali che $A_1, A_3, A_5 \in r$, $A_2, A_4, A_6 \in s$ e che $O = r \cap s$ sia distinto dagli A_i. Si dimostri che i punti di intersezione dei lati opposti dell'esagono, cioè $P_1 = L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5)$, $P_2 = L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6)$ e $P_3 = L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1)$, sono allineati.

(15) Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(a) Si mostri che, se $\mathcal{C}$ è irriducibile, allora ha un numero finito di punti singolari.

(b) Si mostri che $\mathcal{C}$ è ridotta se e solo se ha un numero finito di punti singolari.

(16) Si mostri che una cubica proiettiva con due punti singolari distinti è necessariamente riducibile.

(17) Sia $\mathcal{C}$ la curva proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definita dall'equazione

$$x_0 x_2^2 - x_1^3 + x_0 x_1^2 + 5x_0^2 x_1 - 5x_0^3 \ .$$

(a) Si mostri che $\mathcal{C}$ è liscia.

(b) Si determinino i punti $P \in V(\mathcal{C})$ per cui la tangente a $\mathcal{C}$ in P passi per il punto $Q = [0, 1, 0]$.

(18) Sia $\mathcal{C}$ la curva di $\mathbb{C}^2$ di equazione $f(x, y) = xy^2 - y^4 + x^3 - 2x^2 y = 0$. Si determinino:

(a) I punti impropri e gli asintoti di $\mathcal{C}$.

(b) I punti singolari di $\mathcal{C}$, con le loro singolarità e le loro tangenti principali.

(c) L'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $(4, -4)$.

(19) Sia $\mathcal{C}$ la curva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1 x_2^2 - 3x_1^4 - x_0^2 x_2^2 - 2x_0 x_1^3 = 0$$

(a) Si mostri che $\mathcal{C}$ ha 4 punti singolari, e si osservi che tre di essi sono allineati.

(b) Si dica se $\mathcal{C}$ sia irriducibile.