ANALISI 2

LEZIONE 10

ESERCIZI SUI MOLT. DI LAGRANGE

1) SIA $f(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

TROVARE MAX/MIN DI f SU $\partial B_1 = \{x : |x| = 1\}$

$\partial B_1 = \{g = 0\}$ $\qquad g(x) = |x|^2 - 1$.

- ∂B_1 VINCOLO REGOLARE

$\frac{1}{2}\nabla g = x \neq 0$ SU ∂B_1

- ∂B_1 CPT $\Rightarrow$ MAX/MIN ESISTONO PER W

E VERIFICANO IL SISTEMA M.L.

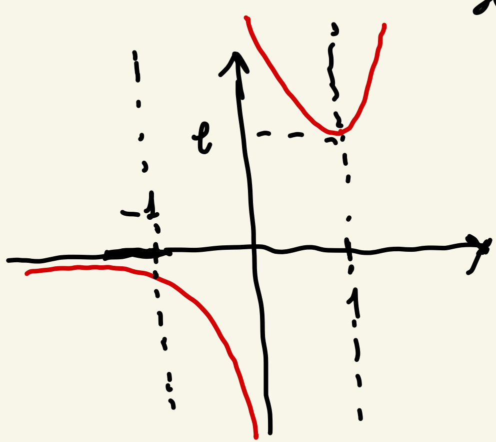
$$\nabla f = \left(e^{x_1}, \dots e^{x_n}\right)$$

M.L. $\begin{cases} e^{x_i} = \lambda x_i & i \in \{1, \dots n\} \\ |x| = 1 \end{cases}$

IN PART. $x_i \neq 0 \ \forall i$ E $\dfrac{e^{x_i}}{x_i} = \dfrac{e^{x_j}}{x_j} \quad \forall i, j$

$$h(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$



OSSERVIAMO CHE

$|x| = 1 \implies$

$x_i \in [-1, 1] \quad \forall i$

$h|_{[-1,1]}$ È INIETTIVA, QUINDI

$$\frac{e^{x_i}}{x_i} = \frac{e^{x_j}}{x_j} \Rightarrow \boxed{x_i = x_j \quad \forall i,j}$$

$$|x| = 1 \Rightarrow \sum_i x_i^2 = n x_1^2 = 1$$

$$\boxed{x_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall i} \quad o \quad \boxed{x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall i}$$

MAX

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

MIN

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

OSS: NON CI SONO ALTRI PUNTI STAZIONARI VINCOLATI (SOL. DEL SISTEMA M.L.)

ES. PER CASA: TROVARE MAX/MIN DI f SU $\partial B_R = \{ x : |x| = R \}$, $R > 0$

FARE ATTENZIONE ALL'INIETTIVITÀ DI φ QUANDO $R > 1$

2 $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ $f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$

$a_{ij} = (A)_{ij}$

TROVARE MAX/MIN DI f SU ∂B_1

CHE ESISTONO PER W

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j (a_{ij} + a_{ji}) x_j$$

M.L. $\begin{cases} \sum_j (a_{ij} + a_{ji}) x_j = \lambda x_i \quad \forall i \\ |x| = 1 \end{cases} \iff (A + A^t) x = \lambda x$

$\downarrow$

CIOÈ x È AUTOVETT. DI $A + A^t$, MATRICE SIMMETRICA

x AUTOVETT. DI AUTOVAL. λ È DI MODULO 1 $\Rightarrow$

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \langle (A+A^t)x, x \rangle = \frac{\lambda}{2} |x|^2 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\max_{\partial B_1} f = \max \left\{ \lambda : \lambda \text{ AUTOVAL. DI } \frac{A+A^t}{2} \right\}$$

$$\min_{\partial B_1} f = \min \left\{ \lambda : \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \right\}$$

E SONO ASSUNTI SUI RISPETTIVI AUTOVETTORI.

3 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

CERCHIAMO MAX/MIN DI f SU M

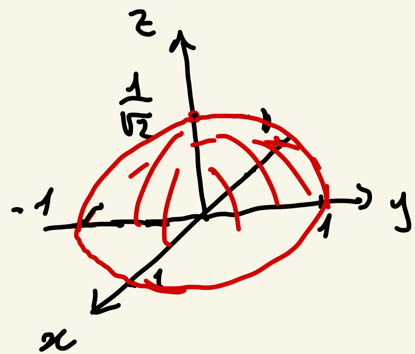
$$f(x,y,z) = xy + yz$$

VINCOLO $M = \{ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1 \} \cap \{ z \geq 0 \}$

ELLISSOIDE DI ROTAZIONE

SEMISPAZIO

CHI È M ?



$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

$M_0 = \mathring{M}$ APERTO DI $\mathbb{R}^3$ (NON SERVONO M.L.)

$$M_1 = \boxed{\{x^2+y^2+2z^2=1\}} \cap \{z>0\}$$

$$M_2 = \{x^2+y^2+2z^2<1\} \cap \boxed{\{z=0\}}$$

$$M_3 = \boxed{\{x^2+y^2+2z^2=1\} \cap \{z=0\}}$$

$\rightarrow$ CIRCONFERENZA UNITARIA

CERCHIANO PT STAZIONARI IN OGNI "PEZZO" M_i

$$\nabla f(x,y,z) = (y,\ x+z,\ y)$$

$$M_0: \begin{cases} \nabla f = 0 \\ z > 0 \\ x^2+y^2+2z^2<1 \end{cases} \Rightarrow \quad y=0, \quad x=-z, \quad \boxed{f(x,y,z)=0}$$

DATO CHE f ASSUME VALORI POSITIVI E NEGATIVI

$\Rightarrow$ MAX/MIN f SONO ASSUNTI SU $\partial M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$

$$M_1 : \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ z > 0 \\ g = 0 \end{cases} \qquad g = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2z^2 - 1\right)$$

$$\nabla g = (x, y, 2z)$$

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \longrightarrow \lambda x + \lambda z = \lambda^2 y \\ y = 2\lambda z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 y = \frac{3}{2} y \quad \begin{cases} y = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \text{NO} \\ \lambda^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, y ,\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}\, y \right\}, \left\{ x = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, y ,\ z = -\frac{1}{\sqrt{6}}\, y \right\}$$

RETTA IN $\mathbb{R}^3$ RETTA IN $\mathbb{R}^3$

SOSTITUIAMO IN $g = 0$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{2}{3}y^2 + y^2 + \frac{1}{3}y^2 = 2y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} : \left\{ x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}},\ z = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \longrightarrow P_1$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} : \left\{ x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ z = \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\} \longrightarrow P_2$$

$$f(P_1) = xy + yz = (x+z)y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

$$f(P_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$$

M_2: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 < 1 \end{cases}$ $g(x,y,z) = z$ $\nabla g = (0,0,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ NO SOL.

M_3: CIRCONFERENZA $\{ (\cos t, \sin t, 0) : t \in [0, 2\pi) \}$

SOSTITUIAMO $f|_{M_3} = h(t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t)$

- $h(t)$ HA MAX PER $\sin t = \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$f(P_3) = f(P_4) = \frac{1}{2}$$

- $h(t)$ HA MIN IN $\sin t = -\cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$f(P_5) = f(P_6) = -\frac{1}{2}$$

IN CONCLUSIONE IL MAX ASSOLUTO
È ASSUNTO IN P_1
E IL MIN ASSOLUTO È ASSUNTO IN P_2.