

13 nov 2020

Prop

$$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\Omega \doteq \{x : f(x) > 0\} \quad (\neq \emptyset)$$

$$L = \{x : f(x) = 0\}$$

Suppongo che $|\nabla f(p)| \neq 0 \quad \forall p \in L (*)$. Allora

$$L = \partial\Omega \quad \text{e} \quad m(\partial\Omega) = 0$$

$m = \text{leb}_m$
 $\uparrow$ misura di Lebesgue
 m -dimensionale

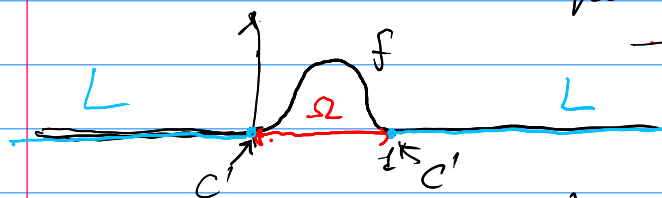
Oss: Se la condizione (*) non vale.

(i) non è detto che $L = \partial\Omega$

(ii) non è detto che $m(\partial\Omega) = 0$

$\Rightarrow$ (iii) $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con $m(\partial\Omega) > 0$

$\rightarrow$ (iv) tale aperto può essere scritto come $\Omega = \{f(x) > 0\}$
 per una opportuna scelta di $f \in C^1$



$\leftarrow$ (i)

Controesempi classici in teoria della misura

- L'insieme di Vitali (ins. non misurabile)
- L'insieme di Cantor (ins di mis nulla non numerabile)
- L'"ingrassamento" di $\mathbb{Q}$

← "elenco" dei razionali:

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_j : j \in \mathbb{N}\}$$

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(r_j, \frac{\varepsilon}{2^j})$$

Ω un insieme limitato
 $\subseteq [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$

$$0 < \mu(\Omega) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{+\infty} 2^{-j} \leq \varepsilon$$

Ω è denso in $[0,1]$ pertanto

$$\partial\Omega \supset [0,1] \setminus \Omega$$

$$\mu(\partial\Omega) \geq \mu([0,1] \setminus \Omega) \geq 1 - \varepsilon$$

"Esercizio": $\exists f \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $\underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_0 \Omega = \{x : f(x) > 0\}$

Dim (Prop): $L = \partial\Omega$ è ovvio: se $p \in L \Rightarrow f(p) = 0$
 $\vee \nabla f(p) \neq 0$

$t \mapsto f(p + tv)$ è strutt. crescente $\begin{cases} \text{positiva per } t > 0 \\ \text{neg per } t < 0 \end{cases}$
 vicino a $t=0$

$$\varphi'(t) = \nabla f(p + tv) \cdot v$$

$$\varphi'(0) = |\nabla f(p)|^2$$

$$|t| < \varepsilon$$

p è accumulato sia da punti di Ω
 che da punti di $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$
 $\Rightarrow p \in \partial\Omega$

Es: È sempre vero che $\partial\Omega \subset L$

(interruzione nella dim)

LEMMA: $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un quadrato $\left(\begin{matrix} \text{ossia il traslato di} \\ [0,1]^n \end{matrix} \right)_{r = \text{lati di } Q}$

$f \in C^1(Q, \mathbb{R})$ allora $g(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ha misura nulla

$$\text{leb}_{n+1}(g(f)) = 0$$

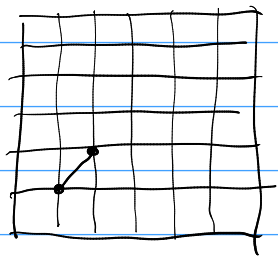
$$m = \text{leb}_{n+1}$$

Dim: Basta vedere che $\forall \varepsilon > 0 \quad m(g(\mathcal{I})) < \varepsilon$

E per far vedere questa basta $g(\mathcal{I}) \subseteq \bigcup_{\alpha} R_{\alpha}$

con $\sum_{\alpha} R_{\alpha} < \varepsilon$

↑ prendo un'unione finita



Divido i lati di Q in n parti uguali ottenendo

$$Q = \bigcup_{\alpha=1}^{l^n} Q_{\alpha}$$

$$1 \leq \alpha \leq l^n$$

$$\text{diam}(Q_{\alpha}) = \frac{\text{diam}(Q)}{l}$$

$$\text{leb}_n(Q_{\alpha}) = \frac{\text{leb}_n(Q)}{l^n}$$

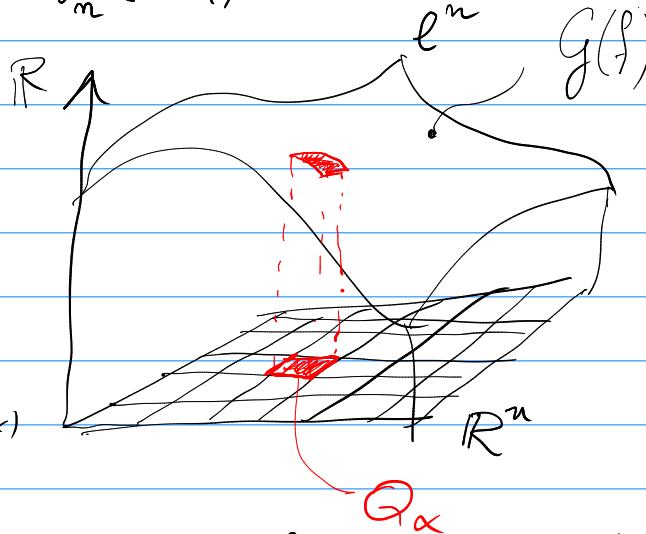
$$\text{diam}(B) = \sup_{x, y \in B} |x - y|$$

La porzione di grafico sopra Q_{α} è contenuta nel "parallelepipedo" R_{α}

$$R_{\alpha} = Q_{\alpha} \times [m_0^{(\alpha)}, m_1^{(\alpha)}] \quad \text{con}$$

$$m_0^{(\alpha)} = \min_{x \in Q_{\alpha}} f(x)$$

$$m_1^{(\alpha)} = \max_{x \in Q_{\alpha}} f(x)$$



$$f \in C^1 \Rightarrow \max_{x \in Q} |\nabla f(x)| = M$$

→ e la funzione f è M -Lipschitz
per esercizio (conseguenza di Taylor con

resto di Lagrange)

$$m_0(\alpha) = f(x_\alpha) \quad m_1(\alpha) = f(\bar{x}_\alpha)$$

$$0 < m_1 - m_0 = f(\bar{x}_\alpha) - f(x_\alpha) \leq M |\bar{x}_\alpha - x_\alpha| \leq M \operatorname{diam}(Q_\alpha)$$

$$\operatorname{leb}_{n+1}(R_\alpha) = \operatorname{leb}_n(Q_\alpha) \cdot (m_1(\alpha) - m_0(\alpha)) \leq \frac{\operatorname{leb}(Q)}{l^n} \cdot M \frac{\operatorname{diam}(Q)}{l} = \frac{C}{l^{n+1}}$$

Quanti parallelepipedi R_α servono per coprire $g(f)$?

$$\operatorname{leb}_{n+1}(g(f)) \leq \sum_{\alpha=1}^{l^n} |R_\alpha| \leq l^n \cdot \frac{C}{l^{n+1}} = \frac{C}{l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

Domanda: Nel lemma, l'ipotesi $f \in C^1$ è necessaria?

R: può essere indebolita (basta f continua su Q)

Il ragionamento si porta a termine usando l'uniforme continuità (come in dimensione 1)

Lemma $\Rightarrow$ Prop

Devo provare che $L = \{x : f(x) = 0\}$

$$m(L) = 0$$

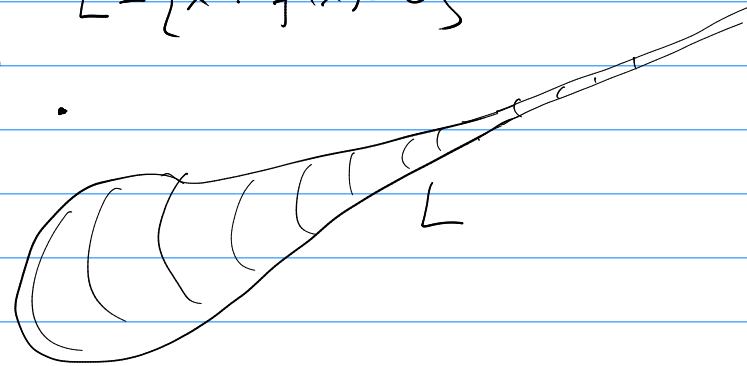
Mostra che $m(L \cap B_R(0)) = 0 \quad \forall R$

$$\Rightarrow m(L) = 0$$

Per il teorema delle funz. implicite

vicino ogni punto $p_0 \in L$ la superficie si scrive come un grafico

$p_0 \in L$ (a meno di riordinare le componenti) trovo un intorno di p_0



della forma $R = Q \times [a, b]$ con Q "cubo" in $\mathbb{R}^{n-1}$, $[a, b] \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{e} \\ (\exists \varphi \in C^1(Q, [a, b])) \end{array} : L \cap R_{p_0} = g(\varphi) \right\} \quad p_0 \rightsquigarrow R_{p_0} \quad L \cap \overline{B_R} \subseteq \bigcup_{p_0 \in L \cap \overline{B_R}} \overset{\circ}{R}_{p_0} \cap L$$

$L \cap \overline{B_R}$ è compatto $\Rightarrow$ posso trovare $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ t.c.

$$L \cap \overline{B_R} \subset \bigcup_{j=1}^{\ell} \overset{\circ}{R}_{p_j} \cap L$$

Lemma visto prima

$$m(L \cap \overline{B_R}) \leq \sum_{j=1}^{\ell} m(\overset{\circ}{R}_{p_j} \cap L) = 0$$

vale $\forall R$

$$\Rightarrow m(L) = 0$$

Esercizio: Dimostrare il lemma per $f \in C^0(\mathbb{R})$

Usando Heine Cantor

Costruzione di un insieme non misurabile

$$\exists V \subset [0, 1] \quad \text{con } V \text{ non misurabile}$$

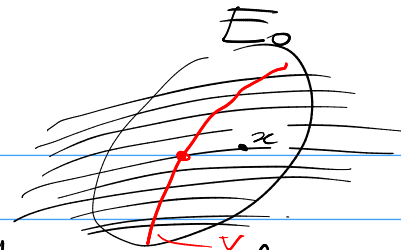
• Se $E \subseteq \mathbb{R}$, $m(E) = 0 \Rightarrow$ tutti i sottoinsiemi di E sono misurabili (ed hanno misura nulla)

Prop: Se $E \subseteq \mathbb{R}$ $\wedge$ $m(E) > 0 \Rightarrow \exists V \subset E$ con V non misurabile

$$\text{Dim: } E = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \overset{E_j}{E \cap [j, j+1]} \Rightarrow \exists j_0 : \underbrace{m(E \cap [j_0, j_0+1])}_{E_0} > 0$$

Considero su E_0 la relazione $x \sim y$

$$\text{t.c. } x - y \in \mathbb{Q}$$



$V \subset E_0$ un insieme che contiene esattamente un elemento per ogni classe non vuota

$$E_0 \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q$$

ed è un unione disgiunta

segue dal ragionamento classico



$$x \in E_0 \quad \exists! \quad v_x \in V : \quad x = v_x + q \quad \text{con } q \text{ razionale } |q| \leq 1 \Rightarrow x \in V + q$$

$$m(V + q) = m(V) \quad \forall q \quad (\text{per inv per traslazioni})$$

$$m(E_0) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V + q)$$

Dimostrazione interrotta.
(finisco prossima volta)
date per buono il risultato

Prop: $\exists \varphi: [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ omeomorfismo (continua e bigettiva e con inv. cont.)
tale che φ manda

(i) φ manda un insieme di misura nulla in un ins. di mis > 0

(ii) " " " " " " " in un ins non misurabile

$C \subseteq [0, 1]$ l'insieme di Cantor

$$x \in [0, 1] \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j 3^{-j} \quad \varepsilon_j \in \{0, 1, 2\}$$

sviluppo ternario di x

$$x \in [0,1] \cap \mathbb{C} \iff x = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j 3^{-j} \quad \varepsilon_j \in \{0,2\}$$

$$\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow [0,1]$$

φ è (deb) crescente

$$\varphi(x) \doteq \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\varepsilon_j}{2} \right) 2^{-j}$$

$\Rightarrow$ ammette un'unica estensione continua

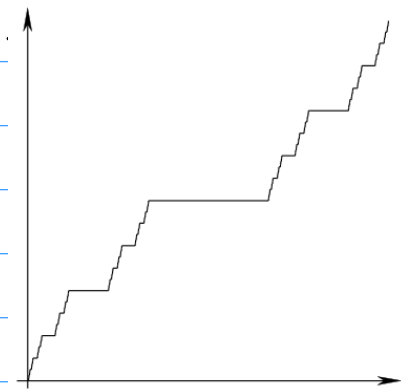
$$t \in [0,1] \quad \tilde{\varphi}(t) \doteq \sup_{x \in \mathbb{C} \cap [0,t]} \varphi(x)$$

$$\tilde{\varphi}|_{\mathbb{C}} = \varphi$$

è deb. crescente

è continua

è surgettiva



$$\tilde{\varphi}|_{\mathbb{C}} = \varphi$$

$\tilde{\varphi}$ è crescente

$$\tilde{\varphi}(\mathbb{C}) = \varphi(\mathbb{C}) = [0,1]$$

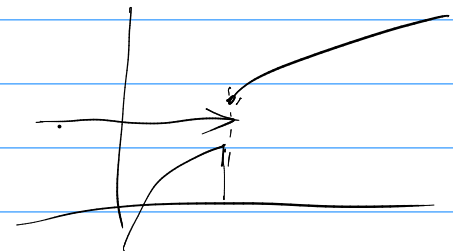
$\Rightarrow \varphi$ continua

$$h(x) = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}(x) + x)$$

h è strettamente crescente (è omeomorf.)

$$m(h([0,1] \setminus \mathbb{C})) = \frac{1}{2} m([0,1] \setminus \mathbb{C}) = \frac{1}{2}$$

$$m(h(\mathbb{C})) = \frac{1}{2}$$



$$[0,1] = ([0,1] \setminus C) \cup C$$

$$h([0,1]) = h([0,1] \setminus C) \cup h(C)$$

Se prendo $V \subset h(C)$ non misurabile

grazie al lemma non dim.

ho che $h^{-1}(V) \subset C$ ha misura nulla

$$h : h^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V$$

manda un insieme di mis nulla in un insieme non mis.

— o —

Es: se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mis $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora

$\varphi \circ f$ è misurabile

ma $f \circ \varphi$ potrebbe non essere misurabile

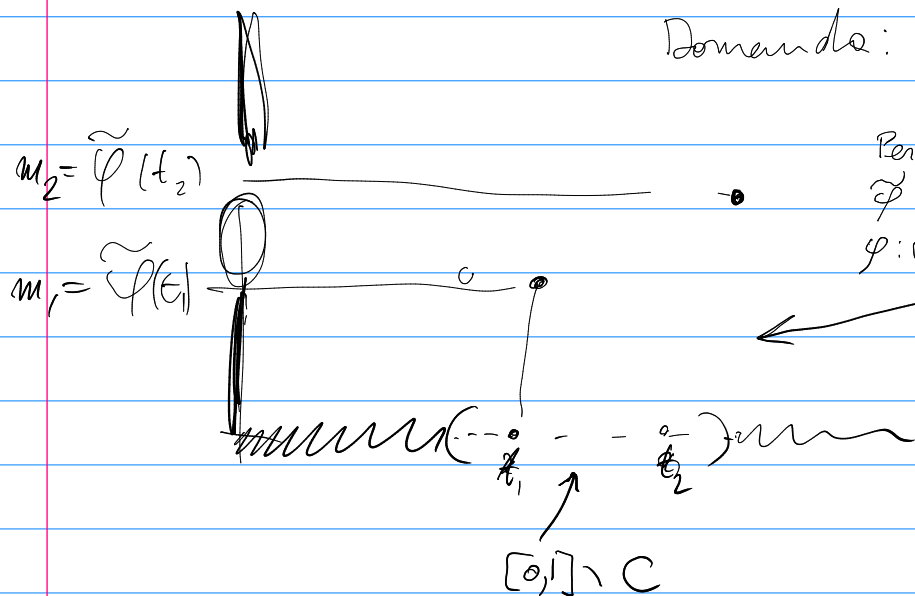
— o —

per m
mis di
left
in arrivo
e in partenza

Domanda: Perché $\tilde{\varphi}$ è continua
ed è costante su $[0,1] \setminus C$?

Per definizione $\tilde{\varphi}$ è monotona, e $\tilde{\varphi}|_C = \varphi$.
 $\tilde{\varphi}$ è costante su $[0,1] \setminus C$ perché altrimenti
 $\varphi: C \rightarrow [0,1]$ non potrebbe essere surgettiva

$$\varphi(C) = \tilde{\varphi}(C) \neq [0,1]$$



Analoga mente $\tilde{\varphi}$ deve essere
continua ovunque perché
altim. non sarebbe surgettiva.