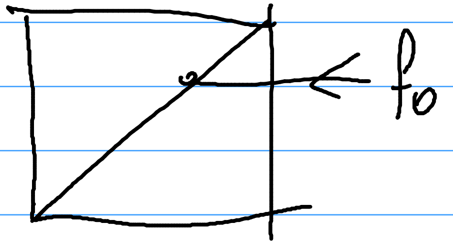
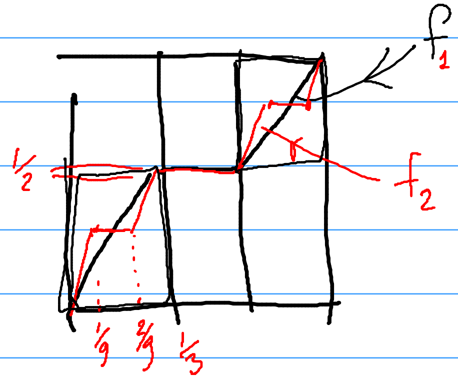
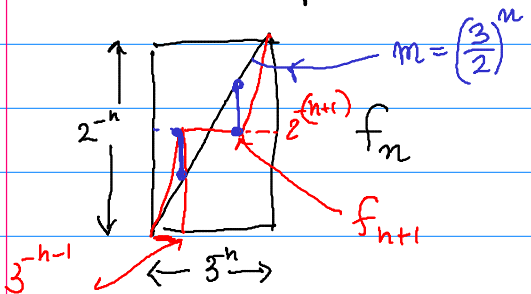
27 nov 2020







Dimostrare che f_n converge

si può vedere che $\sum f_{k+1} - f_k$ è TOTALMENTE CONVERGENTE

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| f_{k+1}(x) - f_k(x) \right| = \left| 2^{-k-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{3^{k+1}} \right| = \left| \frac{1}{2} 2^{-k} - \frac{1}{3} 2^{-k} \right| = \frac{1}{6} 2^{-k}$$

sommabile

$$f_n(x) \longrightarrow f_\infty := f_0(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(f_k(x) - f_{k+1}(x) \right)$$

uniformemente su $[0,1]$

(dettagli per esercizio)

$\Longrightarrow$ f_∞ è continua in quanto limite UNIFORME di funz continue

— o —

ESERCIZIO $(E, |\cdot|)$ sp. vettoriale normato, dico che

$\sum u_n$ é NORMALMENTE CONVERGENTE sse

$\sum |u_n|$ è conv. $\longrightarrow$ continua mostrare che: (i) se f_n di Cauchy in E ammette succ conv in E $\Rightarrow$ f_n conv in E

(ii) E è completo $\Leftrightarrow$ ogni serie normalm conv converge ad un elemento di E

OSS: $\left(\underset{(ii)}{\Rightarrow}\right)$ simile al TEO "CONV TOTALE $\Rightarrow$ CONV UNIF"

$\sum k!\, z^{(k!)}$ Dove converge?

se $|z|=1$ $\Rightarrow$ La serie non converge [addendo non infinitesimo]

$\Rightarrow R \leq 1$

se $z = t \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!\, t^{(k!)} \leq \sum_{h=0}^{+\infty} h\, t^h$$

$R \geq t \quad \forall t<1 \Leftarrow$ converge

È a termini pos

converge

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!\, z^{(k^2)}$$

se $|z|=1$ la serie non CV

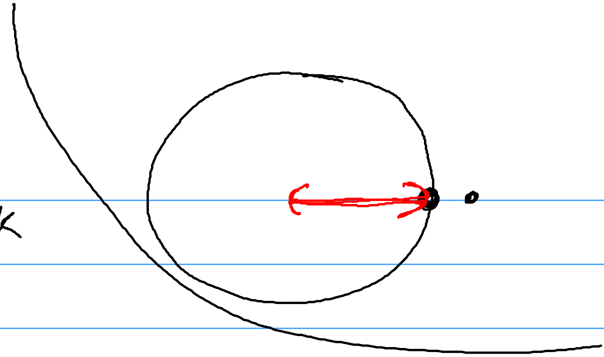
$\Rightarrow R_d CV \leq 1$

$R=1$

$z=t\in(0,1)$ fissato, applico il crit del rapporto a $\sum_{k=0}^{+\infty} k!\, t^{(k^2)}$

$$\frac{(k+1)k!\, t^{k^2+2k+1}}{k!\quad t^{k^2}} = (k+1)\, t^{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow (0,1) \subseteq B(0,R) \Rightarrow R \geq 1$$

$$F(z) \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \qquad (*) \qquad c_k \in \mathbb{C} \ \forall k, \quad z \in \mathbb{C}$$



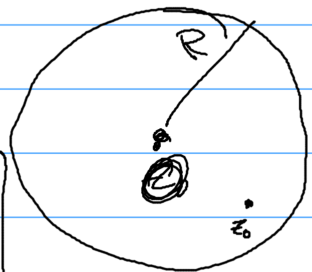
$$F'(z) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} k\, c_k z^{k-1} \qquad (*)'$$ serie derivata

LEMMA (B). Se R è RdCV di $(*)$ allora $(*)'$ ha lo stesso raggio di CV e $\forall\, |z_0| < R$ fissato vale lo sviluppo

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0)\cdot(z-z_0) + o(|z-z_0|) \quad \text{per } z \to z_0$$

Dim: RdCV della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, c_k z^{k-1}$ è lo stesso di $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, c_k z^k$

$\boxed{\text{RdCV} = R \quad \sum c_k z^k}$



$$W(z) = F(z) - F(z_0) - F'(z_0)(z-z_0) \overset{?}{=} o(|z-z_0|)$$

$$= \sum_{\cancel{k=0}\ \cancel{k=1}\ k=2}^{+\infty} c_k z^k - \sum_{\cancel{k=0}\ \cancel{k=1}\ k=2}^{+\infty} c_k z_0^k - \left(\sum_{\cancel{k=1}\ k=2}^{+\infty} k\, c_k z_0^{k-1}\right)(z-z_0)$$

$c_1 z - c_1 z_0$

$c_1(z-z_0)$

$$W(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k \underbrace{\left[z^k - z_0^k - k\, z_0^{k-1}(z-z_0)\right]}_{(A)}$$

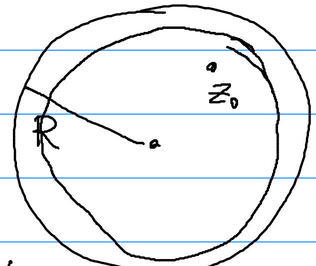
LEMMA Ⓒ: $|z| \le r$, $|z_0| \le r$ allora

$$\left| z^k - z_0^k - k z_0^{k-1}(z - z_0) \right| \le \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} |z - z_0|^2$$

⊛

→ continua dim lemma Ⓑ

Fisso $|z_0| < r < R$ $\qquad B(0,r) \subset\subset B(0,R) \ni z_0$



$B(0,r)$ è un intorno di z_0

$|z| < r$

$\omega(z)$ è definito da una serie TOTALM. CONV su $B(0,r)$

$$|c_k [⊛]| \le \left(|c_k| \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} \right) |z - z_0|^2$$

$r > 0$

$\sum |c_k| \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2}$ converge

è dominata da $\to \sum_{k=2}^{+\infty} |c_k| k^2 r^{k-2}$ $\qquad \sum k^2 |c_k| r^k$

tutte convergono perché $r < R$

$$|\omega(z)| \le \underbrace{\left(\sum_{k \ge 2}^{+\infty} |c_k| \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} \right)}_{\text{costante}} |z - z_0|^2 \qquad \text{stima per } |z| < r$$

$$= O(|z - z_0|^2) = o(|z - z_0|)$$

$|u_k(x)| \le M_k \quad \forall k \in X$

Se $\sum u_k(x)$ è $\boxed{\text{tot}}$. conv su X allora $\sum u_k$ è conv $\qquad$ ⊛ Lemma Ⓑ

e $\left|\sum u_k(x)\right| \le \sum M_k < +\infty \quad \forall x \in X$

LEMMA ©: $|z| \le r$, $|z_0| \le r$ allora

$$|z^k - z_0^k - k z_0^{k-1}(z - z_0)| \le \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} |z - z_0|^2 \quad (*)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

$$\left|\sum_{j=0}^{k-1}\left[z^j z_0^{k-j-1} - z_0^{k-1}\right]\right| |z - z_0| =$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{k-1}(z^j - z_0^j) z_0^{k-j-1}\right| |z - z_0| =$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^i z_0^{j-i-1}\right) z_0^{k-j-1}\right| \cdot |z - z_0|^2$$

$|z| \le r$

$|z_0| \le r$

$$\le \sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{j-1} r^{j-1}\right) r^{k-j-1} |z - z_0|^2$$

$\frac{k(k-1)}{2}$

$$\le \left|\sum_{j=0}^{k-1}(j r^{j-1}) r^{k-j-1}\right| \cdot |z - z_0|^2 = \left(\sum_{j=0}^{k-1} j\right) r^{k-2} |z - z_0|^2$$

Def: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto $F: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

F è derivabile in senso complesso su Ω
(OLOMORFA)

$\forall z_0 \in \Omega$
$\exists \gamma_0 \in \mathbb{C}$ $F(z) = F(z_0) + \gamma_0 \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$ per $z \to z_0$

prodotto tra num. complessi

$\gamma_0 = F'(z_0)$ notaz.

MORALE: La somma di una serie di potenze è OLOMORFA.

Cor: Una $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ ha RdCV R la funz F è derivabile in senso complesso infinite volte

Dim: $F'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1}$

$F^{(n)}$ derivata n volte in senso complesso

$\Rightarrow F'(z)$ è olomorfa $B(0,R)$. Per induz.

$$F^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)\, z^{k-n}$$

~~Verificare~~

$$F^{(n+1)}(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k(k-1) \cdot \ldots (k-n+1)(k-n)\, z^{k-n-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \Omega \subseteq \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathbb{C} \\ \overset{\psi}{x+iy} & & \\ \wr\uparrow & & \\ \Omega_{\mathbb{R}} & \xrightarrow[\binom{u}{v}]{\qquad} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & & (u(x,y),\, v(x,y)) \end{array}$$

$$F(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

$$u(x,y) \doteq \operatorname{Re} F(x+iy)$$

$$v(x,y) \doteq \operatorname{Im} F(x+iy)$$

Supponendo F olomorfa su Ω, mostrare che $u, v \in C^1(\Omega)$ e dire qual è la relazione tra $F'(z_0)$ e

$$\begin{matrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{matrix}$$

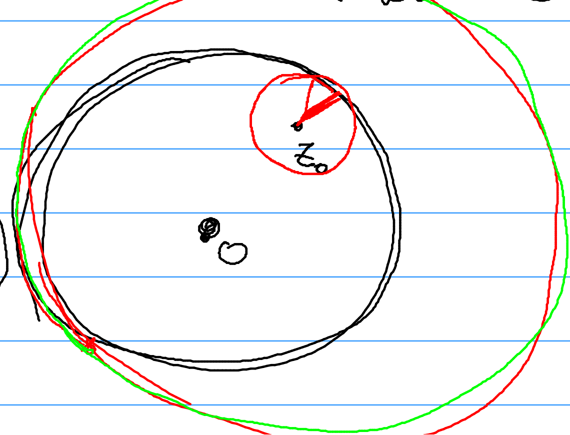
$$z_0 = x_0 + i y_0$$

"Esercizio": $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \qquad \text{RdCV} = R$

$\forall\, |z_0| < R \qquad F$ è sviluppabile in serie di potenze di centro z_0 e con $\text{RdCV} = R'$

$$\boxed{R - |z_0| \leq R'} \leq R + |z_0|$$

$$F(z) = \sum c'_k (z - z_0)^k \qquad \forall\, |z - z_0| < R'$$



SERIE DI FOURIER

$T > 0$

$$C_T(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \{ u \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) : u(t+T) = u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

funzioni continue T-periodiche

$\overset{?}{\simeq} C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

$\boxed{T = 2\pi}$

$(C_T, \| \ \|_\infty)$ è uno sp di Banach

Su $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ considero $\| u \|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 dt$

OSS 1: $\| \ \|_2$ è una norma (per esercizio)

$(*)$ $\boxed{\| u \|_2 = 0 \Longrightarrow u = 0}$

OSS 2: La $\| \cdot \|_2$ è indotta da un prodotto Hermitiano

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \overline{v(t)} \, dt$$

$v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$v(t) = v_1(t) + i v_2(t)$

$\overline{v(t)} = v_1(t) - i v_2(t)$

OSS 3 (esercizio): Mostrare che $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \| \cdot \|_2)$ non è COMPLETO

Suggerimento: considerare $u_n(t) = \sqrt[2n+1]{\sin t}$

succ di Cauchy per $\| \cdot \|_2$ che non conv. in $C_{2\pi}$

$$e_k(t) = e^{ikt}$$

$\{ e_k : k \in \mathbb{Z} \}$ è un sistema ortonormale

$$\langle e_k, e_h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot \overline{e^{iht}} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t} \, dt = \begin{cases} 1 & k = h \\ 0 & k \neq h \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{e^{iht}} = e^{-iht}}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$\boxed{e^{z+w} = e^z \cdot e^w}$$

Ricavare le proprietà di addizione di sin e cos ponendo $z = i\alpha$ $w = i\beta$

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$$

$$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \hookrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi) = \left\{u:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C},\ u \text{ misurabile},\ \int_{-\pi}^{\pi}|u|^2<+\infty\right\}$$

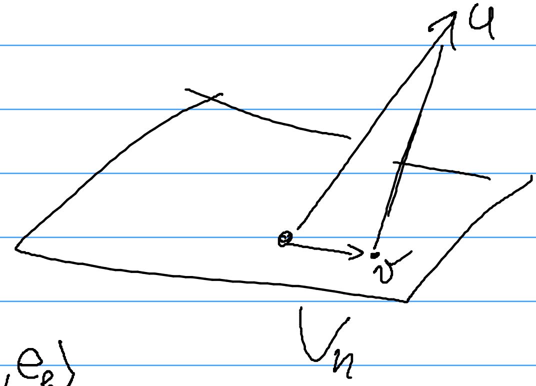
$$u \longmapsto u|_{[-\pi,\pi]}$$

$$V_n = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_k : k\in\mathbb{Z},\ |k|\le n\} \qquad \mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$$

$$\dim_{\mathbb{C}} V_n = 2n+1$$

Dato $u\in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ funzione fissata, voglio trovare $v\in V_n$ che minimizza $\|u-v\|_2^2$

$$v=\sum_{|k|\le n}\lambda_k e_k$$



$$\|u-v\|_2^2 = \left\langle u-\sum_{|k|\le n}\lambda_k e_k,\ u-\sum_{|h|\le n}\lambda_h e_h\right\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle - \sum_{|k|\le n}\lambda_k\langle e_k,u\rangle - \sum_{|h|\le n}\bar\lambda_h\langle u,e_h\rangle + \sum_{\substack{|k|\le n\\|h|\le n}}\lambda_k\bar\lambda_h\underbrace{\langle e_k,e_h\rangle}_{\delta_{h,k}}$$

$$= \langle u,u\rangle + \sum_{|k|\le n}\lambda_k\bar\lambda_k - \sum_{|k|\le n}\bar\lambda_k\hat u_k - \sum_{|k|\le n}\lambda_k\overline{\hat u_k}$$

coefficienti di Fourier di u

$$\hat u_h \doteq \langle u,e_h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)e^{-iht}\,dt$$

$$= \langle u, u \rangle \qquad + \sum_{|k| \le n} \left[\lambda_k \bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_k \hat{u}_k \ \cdots \right.$$

... da finire