$\boxed{\text{11 dic 2020}}$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

F_n sono pari

per $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ est. per cont in $x=0$

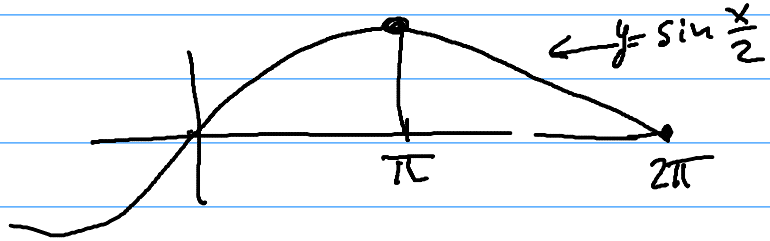
$F_n \geq 0 \quad \forall x$

→ studio di funz.

→ stime dirette

$$\boxed{\sup_{\delta \le |x| \le \pi} F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Se $0 < \delta < \pi$



$\delta \le x \le \pi$

$\sin \delta \le \left|\sin \frac{x}{2}\right| \qquad \delta \le |x| \le \pi$

$\frac{1}{\sin\delta} \geq \frac{1}{\sin(x/2)}$

Se $\delta \le |x| \le \pi \Rightarrow 0 \le F_n(x) \le \frac{1}{n}\frac{1}{(\sin\delta)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

uniformemente in x

$\delta \le |x| \le \pi$

——— ∞ ———

<u>Oss</u>: $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per q.o. $x \in [-\pi, \pi]$

↳ (tranne che per $x=0$)

$$F_n(0) \doteq \lim_{x\to 0} F_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\left(\frac{n\cancel{x/2}}{\cancel{x/2}}\right)^2 = n$$

$F_n(0) = n \longrightarrow +\infty \quad n\to\infty$

OSS: $\liminf_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$ ma $\liminf_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 1$

— o —

Es: Se $f_n \to f$ q.o. in $[0,1]$ f_n, f integrabili su $[0,1]$, $f_n \geq 0$, $f \geq 0$

$$\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{I_k} = \int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \exists (n_k) : \int_0^1 |f_{n_k} - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

se vale = nel LEMMA DI FATOU $\Rightarrow$ conv. L^1 (a meno di ssucc)

— o —

1) Scelgo n_k in modo che

$$\int f_{n_k}(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

$\liminf_{k\to\infty} I_k = I \Rightarrow \exists (n_k) \uparrow +\infty$ $\lim_{k\to\infty} I_{n_k} = I$

ris. su succ. numeriche

$$g_{n_k}(x) = \min\{f_{n_k}(x), f(x)\}$$

CONV DOM (LEBESGUE)

$g_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$
$0 \leq g_{n_k} \leq f(x)$

$$\Rightarrow \int_0^1 |g_{n_k}(x) - f(x)|\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$f_{n_k}(x) = g_{n_k}(x) + (f_{n_k} - f)_+(x) \quad (*)$$

$$\varphi_+(x) \doteq \begin{cases} 0 & \varphi(x) < 0 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{0 \leq f_{n_k} - f}$$

$$\int |(f_{n_k} - f)_+| = \int (f_{n_k} - f)_+ \overset{(*)}{=} \int_0^1 f_{n_k}(x)\,dx - \int_0^1 g_{n_k}(x)\,dx \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\int_0^1 f_{n_k}(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \int_0^1 g_{n_k}(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx \qquad k \to \infty$$

$$f_{n_k} = g_{n_k} + (f_{n_k} - f)_+$$

con $g_{n_k} \to f$ in L^1, $(f_{n_k} - f) \to 0$ in L^1 $\Big\} \Rightarrow f_{n_k} \to f$ in L^1

$$\int_0^1 |f_{n_k} - f|\,dx = \int_0^1 |g_{n_k} + (f_{n_k} - f)_+ - f|\,dx \leq \int_0^1 \Big[|g_{n_k} - f| + |(f_{n_k} - f)_+|\Big]\,dx$$

$$|g_{n_k} - f| \to 0, \quad |(f_{n_k} - f)_+| \to 0 \qquad k \to \infty$$

———— o ————

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^n \log x & x \neq 0 \end{cases} \qquad f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i) $f_n \to 0$ uniformemente

(ii) $\sum f_n$ converge uniformemente? totalmente?

$$f(x) = x^n \log x$$

f_n sono continue su $[0,1]$, si annullano agli estremi

$f_n(x) < 0 \qquad x \in (0,1)$

$$f_n'(x) = n x^{n-1} \log x + x^n \frac{1}{x} = x^{n-1}(n \log x + 1) \qquad x \in (0,1)$$

$$f_n'(x) = 0 \iff \log x = -\frac{1}{n} \iff x = x_n \doteq e^{-1/n}$$

$x_n \to 1 \quad n \to \infty$

$$f_n(x_n) = -\frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| = |f_n(x_n)| = \frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$f_n \to 0$ uniformemente su $[0,1]$

- La serie $\sum f_n(x)$ non conv. totalmente

se $\quad M_n \ge |f_n(x)| \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow M_n \ge \frac{e^{-1}}{n} \Rightarrow M_n$ non è sommabile

$\sum M_n = +\infty$

- La serie NON converge uniformemente ✱

$\forall x$ fissato $\ x \in (0,1)$ $\quad S(x) \doteq \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \log x = (\log x) \frac{x}{1-x}$

$S_N = \sum_{n=1}^{N} x^n \log x$

$$|S(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \log x \right| = (\log x) \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$$\sup_{x \in (0,1)} |S(x) - S_N(x)| \ge \lim_{x \to 1} |S(x) - S_N(x)| = 1$$

non c'è conv. uniforme su $(0,1)$

— o —

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \log x \right) dx$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \log x$$ non conv. uniformemente ma

LA SERIE

1. Converge puntualmente per q.o. $x \in [0,1]$

(conv. pt. $\forall x \in (0,1)$)

2. La conv. delle S_n è dominata (la conv. è monotona)

$$0 \geq S_n \geq \frac{\log x}{1-x} \qquad 0 \leq |S_n| \leq \underbrace{\frac{|\log x|}{1-x}}_{|S(x)|} \quad x \in [0,1]$$

È una funz. mis L^1

$\log x = \log(1 + x-1) \sim x-1$ per $x \to 1$

Pertanto

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 S(x)\,dx \quad n \to \infty$$

Questi li so calcolare

non so trovare un espr. analitica per la primitiva di $\frac{\log x}{1-x}$

- $|S(x)|$ est. per cont in $x=1$
- $|S(x)| \sim |\log x|$ $\quad x \to 0$

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \log x\,dx = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = -\sum_{h=0}^{n+1} \frac{1}{h^2} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^1 x^k \log x = \left[\cancel{\frac{x^{k+1}}{k+1} \log x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^k}{k+1}\,dx = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

Conclusione $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$

Fare lo stesso calcolo per $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k \log x \, dx$

Mostrare che la serie è uniformemente convergente ma non totalmente convergente

L'esercizio si può svolgere senza CONV DOM usando CONV. UNIF.

Esiste $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ $x \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{cases} f_n(x) \geq 0 \\ \text{La serie è uniformemente conv ma non TOTALM. CONV} \end{cases}$

? $\rightarrow$ o non esiste
o si esibisce un controesempio.

---

c_n

Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ determinare il più grande dei seguenti valori in modo che la serie conv. su $\{|z| \leq R\}$ uniformemente

$R = \frac{1}{2}$ $R = 1$ $R = 2$ $R = e$ $R = 3$ $R = 27$

Calcolo il raggio di conv. della serie

<u>Oss</u>: Se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \implies \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

$R = e$

C'è conv. sul bordo?

<u>NO</u> perché se $|z| = e$ l'addendo non è infinitesimo

<u>Dim</u>: $$\left|\frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \frac{|z|}{(1+1/n)^n} \overset{\boxed{|z|=e}}{=} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1$$

$|c_{n+1} z^{n+1}| \geq |c_n z^n| \implies$ l'addendo non è infinitesimo

---

<u>Esercizio</u> (*)

$$\sum \frac{n!}{n^{n+2}} z^n$$

il raggio di conv. è lo stesso ma la serie conv. anche per $|z| = e$ e la conv. è uniforme

---

Es × Casa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

(i) Det. l'insieme A degli x su cui la serie conv. ptualmente

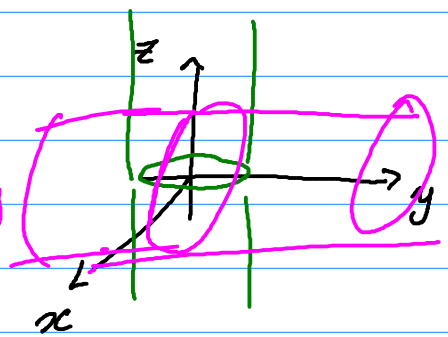
(ii) Mostrare che $\forall \delta > 0$ $\exists A_\delta \subset A$ t.c. la serie conv. unif. su A_δ

e $|A \setminus A_\delta| \leq \delta$

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+z^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

cil di asse z

cil di asse y



Calcolare Vol (E)

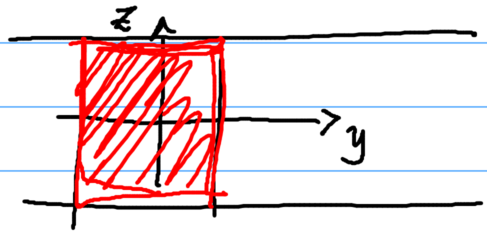
Conviene integrare per strati rispetto ad x

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_*^* \mathrm{Area}(E \cap \{x=t\})\, dt$$

fissato $x=t$ dove variano y e z?

$$\begin{cases} y^2 \leq 1-x^2 \\ z^2 \leq 1-x^2 \end{cases}$$

$|y| \leq \sqrt{1-x^2}$



definisce un quadrato nel piano (z,y) con lato $2\sqrt{1-x^2}$

$E_t = \emptyset$ se $t > 1$

$$\mathrm{Area}(E_t) = \iint_{E_t} dy\,dz = 4(1-t^2) \qquad |t| \leq 1$$

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{-1}^{1}\left(\iint_{E_t} dy\,dz\right)dt = 4\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = 8 - 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

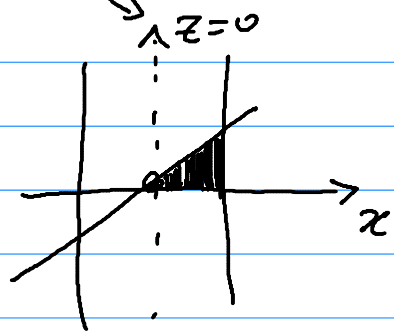
$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

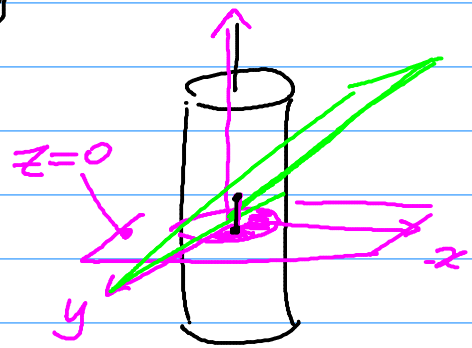
<u>Esercizio</u>: $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ x^2+z^2\le 1,\ y^2+z^2 \le 1\}$

determinare il punto di E più distante da $(0,0,0)$

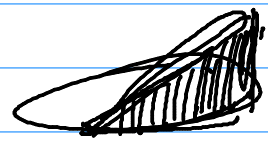
$$C = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le x\}$$

Sez di C nel piano (x,z)





Calcolare il baricentro di C



$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

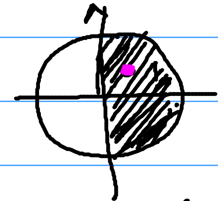
$$\bar{x} = \frac{\iiint_C x\,dx\,dy\,dz}{\mathrm{Vol}(C)}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_C y\,dx\,dy\,dz}{\mathrm{Vol}(C)}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_C z\,dx\,dy\,dz}{\mathrm{Vol}(C)}$$

$$\mathrm{Vol}(C) = \iiint_C 1\,dx\,dy\,dz$$

Per calcolare Vol(C) integro per fili $\qquad D=\{x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$



$D=\mathrm{Proj}_{xy}(C)$

$$\iint_D \left(\int_0^x 1\,dz\right) dx\,dy =$$

coord polari

$$= \iint_D x\,dx\,dy = \iint_{\tilde D} \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\tilde D=\left\{(\rho,\theta) : 0\le\rho\le 1\ ,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

Rettangolo $[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Applico Fubini Tonelli

$$\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1\rho^2\,d\rho\right)$$

$$= \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\iiint_C x\,dx\,dy\,dz = \iint_D x\int_0^x dz = \iint_D x^2\,dz$$

$$\overset{!}{=} \int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^1\rho^3\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

Finire il conto x esercizio.