Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Foglio di esercizi n.ro 3 del 18/12/2020

Nota: le soluzioni marcate come **sketch**, come suggerisce il nome, non sono complete, e in particolare prenderebbero soltanto un punteggio parziale in un esame scritto.

1. Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon X' \to Y'$ mappe aperte.

(1) Si mostri che la mappa
$$f \times g\colon X \times X' \to Y \times Y' ,$$
$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$
è una mappa aperta.

(2) Si deduca che, se f, g sono identificazioni aperte, allora $f \times g$ è un'identificazione.

Soluzione. (1): Vediamo innanzi tutto che, se $h\colon Z \to Z'$ è un'applicazione tra spazi topologici, e $\mathcal{B}$ è una base della topologia di Z, allora per dimostrare che h è aperta è sufficiente verificare che $h(B)$ è aperto in Z' per ogni $B \in \mathcal{B}$. Supponiamo infatti che tale condizione sia verificata. Se A è un aperto di Z, esiste una sottofamiglia $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B$. Allora
$$h(A) = h\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B\right) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} h(B)$$
è aperto, in quanto unione di aperti.

A questo punto, sia $A \times B$ un aperto della base "standard" di $X \times Y$, dove A è aperto in X e B è aperto in Y. Allora $(f \times g)(A \times B) = f(A) \times g(B)$. Poiché f, g sono aperte, $f(A)$ e $g(B)$ sono aperti, per cui lo è anche $f(A) \times g(B)$. Ciò conclude la dimostrazione di (1).

(2): Se f, g sono identificazioni, allora sono continue e surgettive, per cui anche $f \times g$ lo è (perché? provate a scrivere i dettagli, usando la proprietà universale della topologia prodotto). Inoltre, per il punto (1), se f, g sono aperte anche $f \times g$ lo è, per cui $f \times g$ è continua, surgettiva ed aperta, ed è perciò un'identificazione (aperta).

2. Sia $p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la proiezione al quoziente, dove con $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ intendiamo lo spazio ottenuto collassando $\mathbb{Z}$ ad un punto (e non lo spazio ottenuto quozientando $\mathbb{Q}$ per l'azione di $\mathbb{Z}$ tramite traslazioni). Si mostri che la mappa
$$p \times \mathrm{Id}\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q} ,$$
pur essendo prodotto di due identificazioni, non è un'identificazione.

Soluzione. Cerchiamo un aperto saturo di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che contenga $(0, 0)$ e non definisca un intorno di $([0], 0)$ in $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$.

Fissiamo un'enumerazione dei razionali $\mathbb{Q} = \{q_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$. Per qualsiasi punto $(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ indichiamo con $Q((a,b),R)$ il quadrato aperto (in $\mathbb{Q}^2$) di centro (a,b) e lato $2R$, e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia

$$A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q\left((0,q_n), \frac{2^{-n}}{k+1}\right) .$$

Essendo unione di aperti, l'insieme A_k è aperto in $\mathbb{Q}^2$.

Cominciamo con il dimostrare il seguente

Claim: per ogni $a > 0$, sia $k(a) = \lfloor 1/a \rfloor \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\mathbb{Q}^2 \cap ((-\varepsilon,\varepsilon) \times (-a,a)) \nsubseteq A_{k(a)} .$$

Infatti, osserviamo che $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}/(k(a)+1) = 2/(k(a)+1) < 2a$, per cui l'unione numerabile di tutti gli intervalli della forma

$$\left(q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right)$$

non può ricoprire $(-a,a)$. Esiste dunque un elemento (necessariamente irrazionale)

$$z \in (-a,a) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right) .$$

Sia ora n_0 tale che $2^{-n}/(k(a)+1) \leq \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_0$. Si ha in particolare

$$z \notin \bigcup_{n=0}^{n_0} \left(q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right)$$

da cui, essendo z irrazionale,

$$z \notin \bigcup_{n=0}^{n_0} \left[q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right] .$$

Poiché un'unione finita di intervalli chiusi è chiusa, esiste $\delta > 0$ tale che

$$(z-\delta, z+\delta) \cap (-a,a) \cap \bigcup_{n=0}^{n_0} \left[q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right] = \emptyset .$$

Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, esiste dunque $\overline{q} \in \mathbb{Q} \cap (-a,a)$ tale che

$$\overline{q} \notin \bigcup_{n=0}^{n_0} \left[q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right] .$$

Ora, per costruzione il segmento $((-\varepsilon,\varepsilon) \cap \mathbb{Q}) \times \{\overline{q}\}$ è disgiunto da

$$\bigcup_{n=0}^{n_0} \left(q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right)$$

e non può essere contenuto in

$$\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \left(q_n - \frac{2^{-n}}{k(a)+1}, q_n + \frac{2^{-n}}{k(a)+1}\right)$$

in quanto $2^{-n}/(k(a)+1) \leq \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_0$. Ne segue che

$$\mathbb{Q}^2 \cap ((-\varepsilon,\varepsilon)\times(-a,a)) \nsubseteq A_{k(a)} \ ,$$

come voluto.

Veniamo ora alla soluzione dell'esercizio. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ sia $B_k \subseteq \mathbb{Q}^2$ ottenuto traslando $A_{|k|}$ del vettore orizzontale $(k,0)$. Consideriamo l'insieme

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k \ .$$

Essendo unione di aperti, esso è un aperto di $\mathbb{Q}^2$. Inoltre, si verifica immediatamente che $(p\times \mathrm{Id})^{-1}((p\times\mathrm{Id})(A)) = A$. Per concludere, è dunque sufficiente dimostrare che $(p\times\mathrm{Id})(A)$ non è aperto in $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\times\mathbb{Q}$. Poiché $(p\times\mathrm{Id})(A)$ contiene $([0],0)$, se fosse aperto ne conterrebbe un intorno, e conterrebbe perciò un insieme della forma $C\times D$, dove C è un aperto di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ che contiene $[0]$ e D è un aperto di $\mathbb{Q}$ che contiene 0. Poiché $p\colon \mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è continua, $p^{-1}(C)$ dovrebbe essere un aperto C' di $\mathbb{Q}$ che contiene $\mathbb{Z}$. Dovrebbero perciò esistere $a>0$ e $\varepsilon_k>0$, $k\in\mathbb{Z}$, tali che $C \supseteq (-a,a)\cap\mathbb{Q}$, $D\supseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k-\varepsilon_k,k+\varepsilon_k)$, e

$$\begin{aligned}\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k = A = (p\times\mathrm{Id})^{-1}((p\times\mathrm{Id})(A)) \supseteq (p\times\mathrm{Id})^{-1}(C\times D) = C'\times D \\ \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\big((k-\varepsilon_k,k+\varepsilon_k)\times(-a,a)\big) \ .\end{aligned}$$

Ciò contraddice il Claim, e conclude la dimostrazione.

3. Sia $f\colon X\to Y$ un'identificazione. Si mostri che la mappa

$$f\times\mathrm{Id}\colon X\times[0,1]\to Y\times[0,1]$$

è un'identificazione.

(Questo fatto gioca un ruolo nella teoria dell'omotopia che svilupperemo nel secondo semestre, e vale più in generale quando a $[0,1]$ si sostituisca uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff).

Soluzione. Sia $B\subseteq Y\times[0,1]$, e supponiamo $A=(f\times\mathrm{Id})^{-1}(B)$ aperto in $X\times[0,1]$. Dobbiamo mostrare che B è aperto in $Y\times[0,1]$, cioè che è intorno di ogni suo punto. Sia dunque $(y_0,t_0)\in B$, e consideriamo un punto $(x_0,t_0)\in A$ tale che $f(x_0)=y_0$ (tale punto esiste in quanto f, essendo un'identificazione, è surgettiva). Poiché A è aperto, l'insieme $A\cap(\{x_0\}\times[0,1])$ è un aperto di $\{x_0\}\times[0,1]$, cioè esiste un aperto $W\subseteq[0,1]$ tale che $A\cap(\{x_0\}\times[0,1])=\{x_0\}\times W$. Scegliamo ora un intervallino V di $[0,1]$ tale che $t_0\in V\subseteq\overline{V}\subseteq W$. Poniamo

$$U=\{x\in X \mid \{x\}\times\overline{V}\subseteq A\} \ .$$

Per costruzione, $x_0\in U$. Mostriamo ora che U è un aperto di X saturo rispetto ad f. Il fatto che U sia $f-$saturo discende banalmente dal fatto che A è $(f\times\mathrm{Id})-$saturo. Per mostrare che U è aperto, sia $\overline{x}\in U$. Poiché A è aperto, per ogni $t\in\overline{V}$ esistono un aperto

Z_t di X contenente $\overline{x}$ ed un aperto Z'_t di $[0,1]$ contenente t tali che $Z_t \times Z'_t \subseteq A$. Poiché $\{\overline{x}\} \times \overline{V}$ è compatto, esistono $t_1, \ldots, t_n$ tali che

$$\{\overline{x}\} \times \overline{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Z_{t_i} \times Z'_{t_i} \subseteq A \ ,$$

da cui, posto $Z = \bigcap_{i=1}^n Z_{t_i}$, otteniamo $Z \times \overline{V} \subseteq A$, e $Z \subseteq U$. Essendo intersezione finita di aperti, Z è aperto. Ciò mostra che U, essendo intorno di ogni suo punto, è aperto.

Abbiamo allora $U \times V \subseteq A$, da cui $(y_0, t_0) \in f(U) \times V \subseteq B$. Poiché U è un aperto f-saturo ed f è un'identificazione, $f(U)$ è aperto in Y, per cui $f(U) \times V$ è aperto in $Y \times [0,1]$. Abbiamo così mostrato che B è intorno di ogni suo punto, da cui la conclusione.

Nota: La dimostrazione appena data mostra che l'enunciato vale in effetti più in generale, ogni qual volta $[0,1]$ sia rimpiazzato da uno spazio topologico localmente compatto.

4. Sia $G \curvearrowright X$ un'azione di un gruppo G sullo spazio topologico X. Abbiamo dimostrato a lezione che, se l'azione è propria e $K \subseteq X$ è compatto, allora l'insieme

$$\{g \in G \,|\, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

è finito (l'enunciato è stato dato all'interno di un enunciato più ampio, per il quale serviva l'ipotesi di locale compattezza su X; tuttavia, il fatto qui sopra riportato vale in generale). In questo esercizio dimostriamo che, sotto l'ipotesi che X sia T_2, vale anche il viceversa.

Sia dunque X di Hausdorff, e supponiamo che, per ogni compatto $K \subseteq X$, l'insieme $\{g \in G \,|\, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ sia finito. Sia $\Phi\colon X \times G \to X \times X$, $\Phi(x,g) = (x, g \cdot x)$.

(1) Si mostri che, se H è un compatto di $X \times X$, allora esiste un compatto $K \subseteq X$ tale che $H \subseteq K \times K$.
(2) Si mostri che, se H e K sono come al punto precedente, allora $\Phi^{-1}(H) \subseteq K \times G_0$, dove G_0 è un sottoinsieme finito di G.
(3) Si mostri che l'azione $G \curvearrowright X$ è propria.

(Dove si è usata l'ipotesi che X sia T_2?)

Soluzione. (1): Le proiezioni $\pi_1, \pi_2 \colon X \to X \to X$ sul primo e sul secondo fattore sono continue. per cui $\pi_1(H)$ e $\pi_2(H)$ sono compatti di X. Basta allora porre $K = \pi_1(H) \cup \pi_2(H)$, e ricordare che un'unione finita di compatti è compatta.

(2): Sia $(x,g) \in \Phi^{-1}(H)$. Allora $\Phi(x,g) = (x, g \cdot x) \in H \subseteq K \times K$, per cui $x \in K$, $g \cdot x \in K$, e perciò $x \in K \cap g^{-1} \cdot K \neq \emptyset$. Per ipotesi, ne segue che g^{-1} varia in un insieme finito, e ciò prova (2).

(3): Sia H un compatto di $X \times X$. Poiché X è T_2, anche $X \times X$ lo è, per cui H è chiuso. Poiché Φ è continua, $\Phi^{-1}(H)$ è chiuso. Per (2), $\Phi^{-1}(H)$ è anche contenuto in un compatto, per cui, essendo chiuso in un compatto, è compatto, da cui la tesi.

5. Sia $G \curvearrowright X$ un'azione di un gruppo G sullo spazio topologico X, e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso tale che $G \cdot D = X$ (cioè $\bigcup_{g \in G} g(D) = X$). Si assuma anche che la famiglia $\{g(D)\,,\ g \in G\}$ sia localmente finita. Sia inoltre $\sim$ la relazione di equivalenza su D data da $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g(x) = y$.

(1) Si mostri che l'inclusione $D \hookrightarrow X$ induce un omeomorfismo $D/\sim \cong X/G$.
(2) Si mostri che, se X è T_2, allora l'azione $G \curvearrowright X$ è propria (suggerimento: si sfrutti l'esercizio precedente).

Soluzione. (1): Essendo composizione dell'inclusione di D in X e della proiezione $X \to X/G$, la mappa $i \colon D \to X/G$ è continua. Inoltre, è surgettiva in quanto $G \cdot D = X$, e, per definizione di $\sim$, passa al quoziente definendo una mappa iniettiva $j \colon D/\sim \to X/G$. Per concludere, basta mostrare che $j \colon D/\sim \to X/G$ è chiusa.

Sia dunque C un chiuso di $D/\sim$. Per definizione di topologia quoziente, $C' = \pi_D^{-1}(C)$ è un chiuso di D (saturo rispetto a $\sim$), dove $\pi_D \colon D \to D/\sim$ è la proiezione al quoziente. Ora, $j(C)$ è chiuso in X/G se e solo se $\pi^{-1}(j(C))$ è chiuso in X, dove $\pi \colon X \to X/G$ è la proiezione al quoziente. Ma $\pi^{-1}(j(C)) = G \cdot C'$, per cui ci basta dimostrare che $G \cdot C'$ è chiuso in X. Essendo una famiglia localmente finita di chiusi, $\{g(D)\,,\ g \in G\}$ definisce un ricoprimento fondamentale di X, per cui ci basta mostrare che l'intersezione di $G \cdot C'$ con $g \cdot D$ è un chiuso di $g \cdot D$ per ogni $g \in G$. Usando che C' è saturo rispetto a $\sim$ si verifica facilmente che per ogni $g \in G$ si ha $G \cdot C' \cap g \cdot D = g \cdot C'$. Poiché $g \colon X \to X$ è un omeomorfismo e C' è chiuso in D, abbiamo che $g \cdot C'$ è chiuso in $g \cdot D$, e ciò conclude la dimostrazione.

(2): Sia K un compatto di X. Poiché la famiglia $\{g(D)\,,\ g \in G\}$ è localmente finita, l'insieme

$$G_0 = \{g \in G \mid K \cap g \cdot D \neq \emptyset\}$$

è finito. In particolare, $K \subseteq \bigcup_{g \in G_0} g \cdot D$.

Sia $g \in G$ tale che $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$, e sia $x_0 \in g \cdot K \cap K$. Poiché $x_0 \in K$, esiste $g_0 \in G_0$ tale che $x_0 \in g_0 \cdot D$, da cui $g \cdot x_0 \in (gg_0) \cdot D$. Poiché $g \cdot x_0 \in K$, ne segue che $gg_0 \in G_0$, cioè esiste $g_1 \in G_0$ tale che $gg_0 = g_1$, ovvero $g = g_1 g_0^{-1}$. Dunque $g \in G_0 \cdot G_0^{-1}$, che è un insieme finito. La tesi ora segue dall'esercizio precedente.

6. Se X, Y sono spazi topologici, la *topologia unione disgiunta* su $X \sqcup Y$ è la topologia per cui $A \subseteq X \sqcup Y$ è aperto se e solo se lo sono sia $A \cap X$ sia $A \cap Y$ (si dimostra facilmente che quella data è una definizione ben posta).

(1) Si mostri che le inclusioni $i \colon X \to X \sqcup Y$, $j \colon Y \to X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche aperte e chiuse.
(2) Si mostri che, se C è una componente connessa di $X \sqcup Y$, allora C è una componente connessa di X oppure una componente connessa di Y.
(3) Si mostri che, se X e Y sono entrambi non vuoti, $X \sqcup Y$ è sconnesso.
(4) Si mostri che $X \sqcup Y$ è compatto se e solo se sia X sia Y sono compatti.

Soluzione. (1) è una diretta conseguenza delle definizioni.

(2): Sia $C \subseteq X \sqcup Y$ connesso. Poiché $(X \cap C) \sqcup (Y \cap C)$ fornisce una partizione di C in aperti, si ha $X \cap C = \emptyset$ (per cui $C \subseteq Y$) o $Y \cap C = \emptyset$ (per cui $C \subseteq X$). Nel primo caso, poiché l'inclusione di Y in $X \sqcup Y$ è un'immersione topologica, dal fatto che C sia un connesso massimale non vuoto di Y come sottospazio di $X \sqcup Y$ segue che C è un connesso massimale non vuoto di Y, cioè una componente connessa di Y. Analogamente, se $C \subseteq X$, allora C è una componente connessa di X.

(3): Segue immediatamente da (2).

(4): Se $X \sqcup Y$ è compatto, allora sia X sia Y, essendo chiusi in $X \sqcup Y$, sono compatti. Viceversa, se X, Y sono compatti, allora anche $X \sqcup Y$ lo è in quanto unione finita di compatti è compatta (stiamo anche usando (1), cioè il fatto che X è omeomorfo al sottospazio X si $X \sqcup Y$).

7. Siano X, Y due spazi topologici, e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Denotiamo con $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ il *bouquet* di X e Y (rispetto a x_0, y_0), cioè lo spazio topologico

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y)/\{x_0, y_0\} \ .$$

Nel seguito, considereremo fissati x_0, y_0, e indicheremo $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ semplicemente con $X \vee Y$.

(1) Si mostri che le mappe $i \colon X \to X \vee Y$, $j \colon Y \to X \vee Y$ indotte dalle inclusioni di X, Y in $X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche.
(2) Si mostri che $X \vee Y$ è connesso se e solo se sia X sia Y lo sono.
(3) Si mostri che $X \vee Y$ è compatto se e solo se sia X sia Y lo sono.
(4) Si mostri che se X e Y sono T_1, allora $i(X)$ e $j(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y$ e le mappe i, j sono chiuse.
(5) Si mostri che se X e Y sono T_2, allora $X \vee Y$ è T_2.
(6) Si mostri che se X e Y sono regolari, allora $X \vee Y$ è regolare.
(7) Si mostri che se X e Y sono normali, allora $X \vee Y$ è normale.
(8) Si mostri con un esempio che se X e Y sono T_4, non è detto che anche $X \vee Y$ lo sia.

Soluzione. Denotiamo con $i' \colon X \to X \sqcup Y$, $j' \colon Y \to X \sqcup Y$ le inclusioni e con $\pi \colon X \sqcup Y \to X \vee Y$ la proiezione, così che $i = \pi \circ i'$, $j = \pi \circ j'$.

(1): Essendo composizione di funzioni continue, i è continua, ed è chiaramente iniettiva. Vediamo che è aperta sull'immagine. Sia A un aperto di X. Se $x_0 \notin A$, allora $\pi^{-1}(i(A)) = A$, per cui, per definizione di topologia quoziente, $i(A)$ è aperto in $X \vee Y$, e a maggior ragione è aperto in $i(X)$. Se invece $x_0 \in A$, abbiamo $i(A) = i(X) \cap (i(A) \cup i(Y))$, per cui ci basta mostrare che $i(A) \cup i(Y)$ è aperto in $X \vee Y$. Ma, poiché $x_0 \in A$, si ha $\pi^{-1}(i(A) \cup i(Y)) = A \cup Y$, che è aperto in $X \sqcup Y$, da cui la tesi.

(2): Se X ed Y sono connessi, per (1) $X \vee Y$ è unione di due connessi con intersezione non vuota, e perciò è connesso. Viceversa, se ad esempio X è sconnesso, allora $X = A \sqcup B$, con A e B aperti non vuoti. Senza perdita di generalità supponiamo $x_0 \in B$. Allora $X \vee Y = i(A) \sqcup (i(B) \cup j(Y))$ è una partizione di $X \vee Y$ in aperti non vuoti, per cui $X \vee Y$ è sconnesso.

(3): Se X ed Y sono compatti, per (1) $X \vee Y$ è unione finita di compatti, ed è dunque compatto. Viceversa, supponiamo $X \vee Y$ compatto, e mostriamo ad esempio che X è compatto. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Per ogni $i \in I$, sia $B_i = i(A_i)$ se $x_0 \notin A_i$, e $B_i = i(A_i) \cup j(Y)$ se $x_0 \in A_i$. È facile verificare che $\{B_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di $X \vee Y$, che ammette perciò un sottoricoprimento finito $\{B_i\}_{i \in I_0}$, $I_0 \subseteq I$. È immediato verificare che $\{A_i\}_{i \in I_0}$ è un ricoprimento finito di X, che è perciò compatto.

(4): Supponiamo che X, Y siano T_1. Basta dimostrare che i è chiusa (la dimostrazione per j è identica). Se $C \subseteq X$ è chiuso, allora $\pi^{-1}(i(C)) = C$ se $x_0 \notin C$ e $\pi^{-1}(i(C)) = C \cup \{y_0\}$ se $x_0 \in C$. In ogni caso, poiché $\{y_0\}$ è chiuso in Y, si ha che $\pi^{-1}(i(C))$ è chiuso in $X \sqcup Y$, per cui $i(C)$ è chiuso in $X \vee Y$ per definizione di topologia quoziente. Osserviamo che, di conseguenza, $X \vee Y$ è T_1, in quanto i punti di $X \vee Y$ sono immagini di punti tramite i o j, e i, j sono chiuse.

(5): Siano $[p], [q]$ punti distinti di $X \vee Y$.

Se $p, q \in X \setminus \{x_0\}$, poiché X è T_2 esistono aperti disgiunti U_p, U_q di X con $p \in U_p$, $q \in U_q$. Usando (4) è facile verificare che $i(X) \setminus \{[x_0]\}$ è aperto in $X \vee Y$, per cui $i(U_p)$ e $i(U_q)$, essendo aperti in un aperto, sono aperti disgiunti di $X \vee Y$ che separano $[p]$ e $[q]$. Si procede analogamente se $p, q \in Y \setminus \{y_0\}$.

Se $p \in X \setminus \{x_0\}$, $q \in Y \setminus \{y_0\}$, allora $i(X \setminus \{x_0\})$ e $j(Y \setminus \{y_0\})$ sono aperti (sempre per(4)) disgiunti di $X \vee Y$ che separano $[p]$ e $[q]$.

Infine, se $[p] = [x_0] = [y_0]$, possiamo assumere senza perdita di generalità che $q \in X \setminus \{x_0\}$. In questo caso, se U_p, U_q sono aperti disgiunti di X che contengono p, q rispettivamente, gli intorni disgiunti di $[p]$ e $[q]$ in $X \vee Y$ sono dati da $i(U_p) \cup j(Y)$ e $i(U_q)$.

(6): Abbiamo già visto che, se X, Y sono T_1, anche $X \vee Y$ lo è. Vediamo allora che $X \vee Y$ è T_3. Siano $[p]$ un punto e C un chiuso di $X \vee Y$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $p \in X$. Abbiamo $\pi^{-1}(C)$ chiuso in $X \sqcup Y$, per cui $C' = \pi^{-1}(C) \cap X$ è chiuso in X. Esistono perciò aperti disgiunti U_p, V di X tali che $p \in U_p$ e $C' \subseteq V$. Siano ora $W_{[p]} = i(U_p)$ se $x_0 \notin U_p$ e $W_{[p]} = i(U_p) \cup j(Y)$ se $x_0 \in U_p$, e $W_C = i(V)$ se $x_0 \notin C'$ e $W_C = i(C') \cup j(Y)$ se $x_0 \in C'$. Allora, gli insiemi $W_{[p]}$ e W_C sono aperti di $X \vee Y$ (perché? attenzione: bisogna ancora usare che X, Y sono T_1) che separano $[p]$ da C.

(7): La dimostrazione è analoga a quella di (6).

(8): Siano $X = \{x_0, x_1\}$ dotato della topologia i cui aperti sono $\emptyset, X, \{x_0\}$, e $Y = \{y_0, y_1\}$ dotato della topologia i cui aperti sono $\emptyset, Y, \{y_0\}$. Gli spazi X, Y sono T_4 in quanto non contengono una coppia di chiusi disgiunti non vuoti. Siano ora $C_1 = i(x_1)$, $C_2 = j(y_1)$. Poiché $\pi^{-1}(C_1) = \{x_1\}$, che è chiuso in X (in quanto $\{x_0\}$ è aperto), C_1 è chiuso in $X \vee Y$. Analogamente lo è anche C_2, e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Tuttavia, se $A_1 \supseteq C_1$ è un aperto di $X \vee Y$, allora $\pi^{-1}(A_1)$ deve essere un aperto di $X \sqcup Y$, per cui $\pi^{-1}(A_1) \cap X$ deve essere un aperto di X che contiene x_1. Per come è definita la topologia di X, si ha allora necessariamente $x_0 \in \pi^{-1}(A_1)$, per cui $[x_0] \in A_1$. Analogamente si dimostra che, se A_2 è un aperto di $X \vee Y$ con $C_2 \subseteq A_2$, allora $[x_0] \in A_2$, per cui necessariamente $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, e $X \vee Y$ non è normale.

8. Sia X uno spazio topologico, sia $x_0 \in X$ e siano Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cup Z = X$ e $Y \cap Z = \{x_0\}$. Si mostri che

$$X \cong (Y, x_0) \vee (Z, x_0) .$$

Soluzione. Le inclusioni di Y e Z inducono una mappa continua $j\colon Y \sqcup Z \to X$, che passa al quoziente definendo una mappa continua (e ovviamente bigettiva) $i\colon (Y, x_0) \vee (Z, x_0) \to X$. Per concludere, basta verificare che i è chiusa. Sia $C \subseteq (Y, x_0) \vee (Z, x_0)$ chiuso. Allora la sua preimmagine C' in $Y \sqcup Z$ è chiusa, per cui $C' \cap Y$ è chiuso in Y

e $C' \cap Z$ è chiuso in Z. Poiché Y e Z sono chiusi in X, se ne deduce che $j(C' \cap Y)$, essendo chiuso in un chiuso, è chiuso in X, e analogamente lo è anche $j(C' \cap Z)$. Dunque $i(C) = j(C') = j(C' \cap Y) \cup j(C' \cap Z)$, essendo unione finita di chiusi, è chiuso in X, come voluto.

9. Si costruiscano due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}^2$ tali che $A \cup B = \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \{0\}$, ma $(A, 0) \vee (B, 0)$ non sia omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Soluzione (sketch). Basta porre $A = \{(x, y) \,|\, y < 0\} \cup \{(0, 0)\}$ e $B = \{(x, y) \,|\, y \geq 0\}$. Si vede facilmente che $(A, 0) \vee (B, 0)$ è sconnesso dalla classe dell'origine, per cui non può essere omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

10. Supponiamo che X, Y siano spazi topologici omogenei (si veda l'Esercizio 6 del Foglio 2). Si mostri che $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ non dipende (a meno di omeomorfismo) dalla scelta di x_0 e y_0, e si può perciò denotare con $X \vee Y$. Se ne deduca che è ben definito $S^1 \vee S^1$.

Sia
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x^2 - 2x + y^2)(x^2 + 2x + y^2) = 0\} \ .$$
Si mostri che $S^1 \vee S^1 \;\cong\; X$.

Soluzione. Siano x_0, x_1 punti di X, e y_0, y_1 punti di Y. Per ipotesi, esistono omeomorfismi $f\colon X \to X$ e $g\colon Y \to Y$ tali che $f(x_0) = x_1$ e $g(y_0) = y_1$. La mappa
$$f \sqcup g\colon X \sqcup Y \to X \sqcup Y$$
la cui restrizione a X è uguale ad f e la cui restrizione a Y è uguale a g è continua, per cui è continua anche la sua composizione con la proiezione $\pi_1\colon X \sqcup Y \to (X, x_1) \vee (Y, y_1)$. Abbiamo $\pi_1(f(x_0)) = \pi_1(x_1) = \pi_1(y_1) = \pi_1(g(x_0))$, per cui la composizione $\pi_1 \circ (f \sqcup g)$ passa al quoziente definendo una funzione continua $(X, x_0) \vee (Y, y_0) \to (X, x_1) \vee (Y, y_1)$. Tale funzione è un omeomorfismo, in quanto ammette un'inversa continua ottenuta con la procedura appena descritta a partire da $f^{-1} \sqcup g^{-1}$.

Se $p_0 = e^{i\theta_0}$, $p_1 = e^{i\theta_1}$ sono punti di S^1, allora la mappa $f\colon S^1 \to S^1$, $f(z) = e^{i(\theta_1 - \theta_0)}z$ è un omeomorfismo (essendo continua con inversa continua $f^{-1}(z) = e^{i(\theta_0 - \theta_1)}z$) e tale che $f(p_0) = p_1$. Dunque $S^1 \vee S^1$ è ben definito.

Siano $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x^2 - 2x + y^2) = 0\}$, $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x^2 + 2x + y^2) = 0\}$. Allora $Y \cong S^1$, $Z \cong S^1$, $X = Y \cup Z$ e $Y \cap Z = \{(0, 0)\}$. Inoltre, Y e Z sono chiusi in $\mathbb{R}^2$, dunque a maggior ragione in X. Utilizzando l'esercizio precedente possiamo concludere che $X \cong S^1 \vee S^1$.

11. Sia X uno spazio topologico. La *sospensione* $S(X)$ di X è definita come segue: posto $Y = X \times [-1, 1]$ (dotato della topologia prodotto) e $(x, t) \sim (y, s)$ se e solo se $(x, t) = (y, s)$, oppure $t = s = -1$, oppure $t = s = 1$, si definisce
$$S(X) = Y/\sim \ .$$

(1) Si mostri che $S(X)$ è connesso.
(2) Si mostri che $S(X)$ è compatto se e solo se X è compatto.
(3) Si mostri che, se X è T_2, allora $S(X)$ è T_2.

(4) Si mostri che $S(S^n) = S^{n+1}$.

Soluzione. (1): Sia $\pi\colon X \times [-1,1] \to S(X)$ la proiezione al quoziente. Per ogni $x \in X$, sia $C_x = \pi(\{x\} \times [-1,1])$. Poiché $\{x\} \times [-1,1] \cong [-1,1]$ è connesso e π è continua, C_x è connesso. Inoltre, $S(X) = \bigcup_{x \in X} C_x$ ed il punto $\pi(X \times \{1\})$ appartiene a C_x per ogni $x \in X$. Essendo unione di una famiglia di connessi che si intersecano in un punto, $S(X)$ è pertanto connesso.

(2): Se X è compatto, allora $X \times [-1,1]$ lo è, in quanto prodotto di compatti, e dunque anche $S(X)$ lo è, in quanto quoziente di un compatto. Viceversa, supponiamo $S(X)$ compatto, e sia $C_0 = \pi(X \times \{0\})$. Poiché $X \times \{0\}$ è un chiuso (in quanto prodotto di chiusi) saturo di $X \times [-1,1]$, l'insieme C_0 è un chiuso di $S(X)$, ed è pertanto compatto. Per concludere, basta osservare che la mappa $j\colon X \to C_0$, $j(x) = \pi(x,0)$ è un omeomorfismo. Essendo composizione di funzioni continue, j è continua, ed è ovviamente bigettiva. Se A è un aperto di X, allora l'insieme $B = (A \times [-1,1]) \cup (X \times [-1,0)) \cup (X \times (0,1])$ è un aperto saturo di $X \times [-1,1]$, per cui $\pi(B)$ è aperto in $S(X)$. Dunque $j(A) = C_0 \cap \pi(B)$ è aperto in C_0, per cui j è aperta, ed è perciò un omeomorfismo.

(3): Osserviamo preliminarmente che $X \times [-1,1]$, essendo prodotto di spazi T_2, è T_2. Siano $[p],[q]$ punti distinti di $S(X)$.

Se né $[p]$ né $[q]$ appartengono a $\pi(X \times \{\pm 1\})$, allora esistono aperti disgiunti U_p, U_q di $X \times [-1,1]$ tali che $p \in U_p$, $q \in U_q$. A meno di intersecare U_p ed U_q con $X \times (-1,1)$, che è aperto in $X \times [-1,1]$, possiamo anche supporre che U_p, U_q siano saturi. Le loro proiezioni in $S(X)$ forniscono pertanto intorni disgiunti di $[p]$ e $[q]$ in $S(X)$.

Se $[p] = \pi(X \times \{1\})$ e $q = \pi(x,t)$ con $x \in X$ e $t < 1$ (non escludiamo il caso $t = -1$), gli insiemi $U_p = X \times ((t+1)/2, 1]$ e $U_q = X \times [-1, (t+1)/2)$ sono aperti saturi, le cui proiezioni su $S(X)$ forniscono intorni disgiunti di $[p]$ e $[q]$. Il caso in cui $[p] = \pi(X \times \{-1\})$ è del tutto analogo.

(4): Sia

$$f\colon S^n \times [-1,1] \to S^{n+1}\,, \quad f((x_0,\ldots,x_n,)t) = (x_0\sqrt{1-t^2}, x_1\sqrt{1-t^2}, \ldots, x_n\sqrt{1-t^2}, t)\ .$$

È immediato verificare che f è ben definita e surgettiva, e che $f(x,t) = f(x',t')$ se e solo se $(x,t) \sim (x',t')$. Per concludere, è pertanto sufficiente dimostrare che f è un'identificazione. Ciò segue immediatamente dal fatto che f è chiusa, in quanto definita su uno spazio compatto a valori in uno spazio T_2.

12. Sia X uno spazio topologico. Il *cono* $C(X)$ di X è definito come segue: posto $Y = X \times [0,1]$ (dotato della topologia prodotto) si pone

$$C(X) = Y/(X \times \{0\})\ .$$

Inoltre, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $C'(A) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ponendo

$$C'(A) = \{(ta, 1-t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid a \in A,\ t \in [0,1]\}\ .$$

(1) Si mostri che $C(X)$ è connesso.
(2) Si mostri che $C(X)$ è compatto se e solo se X è compatto.
(3) Si mostri che, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto, allora $C(A)$ è omeomorfo a $C'(A)$.
(4) Si esibisca un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ per cui $C(A)$ e $C'(A)$ non siano omeomorfi.

Soluzione (sketch). I punti (1) e (2) si dimostrano in maniera del tutto analoga a quelli dell'esercizio precedente. Per il punto (3), assumiamo che A sia compatto, e sia

$$f\colon A \times [0,1] \to C'(A)\,, \qquad f(a,t) = (ta, 1-t)\ .$$

La funzione f è continua e surgettiva, e $f(a,t) = f(a',t')$ se e solo se $(a,t) = (a',t')$, oppure $t = t' = 0$. Per concludere, è sufficiente dimostrare che f è un'identificazione, ma ciò segue immediatamente dal fatto che essa è chiusa, in quanto $A \times [0,1]$ è compatto e $C'(A)$, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$, è T_2.

(4): Sia $A = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$. Allora $C(A)$ non è primo numerabile (si veda la lezione del 10/12/2020), mentre $C'(A)$, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, lo è. Dunque $C(A)$ e $C'(A)$ non possono essere omeomorfi.

13. Siano $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette proiettive distinte.

(1) Si dica se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r_1$ sia connesso.
(2) Si dica se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (r_1 \cup r_2)$ sia connesso.

Soluzione. È facile verificare che esiste una proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(r_1) = \{x_0 = 0\}$, $f(r_2) = \{x_1 = 0\}$. Poiché le proiettività sono omeomorfismi, e la restrizione di un omeomorfismo è un omeomorfismo sull'immagine, ne segue che possiamo assumere $r_1 = \{x_0 = 0\}$ e $r_2 = \{x_1 = 0\}$. Abbiamo allora che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r_1 \cong \mathbb{R}^2$ è connesso, mentre $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (r_1 \cup r_2) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$ è sconnesso (in quanto unione degli aperti disgiunti non vuoti $\{x > 0\}$ e $\{x < 0\}$).

14. Sia H un iperpiano $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, e sia $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})/H$ lo spazio ottenuto da $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ collassando H ad un punto. Si mostri che X è omeomorfo a S^n.

Soluzione (sketch). Essendo T_2 e compatto, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è normale. Usando questo fatto, ed il fatto che H è chiuso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, si vede facilmente che X è T_2 (e compatto, in quanto quoziente di un compatto). Inoltre, non è difficile verificare che la proiezione al quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to X$ induce un omeomorfismo tra $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus H$ e $X \setminus \{[H]\}$, dove $[H]$ rappresenta la proiezione di H in X (ed è perciò un punto).

In definitiva, X è compatto e T_2, e togliendo un punto da X si ottiene uno spazio omeomorfo a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus H \cong \mathbb{R}^n$. Per unicità della compattificazione di Alexandrov, ciò implica che X è la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^n$, ed è perciò omeomorfo ad S^n.

In alternativa, osserviamo innanzi tutto che possiamo assumere che H sia l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$. Abbiamo visto a lezione che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è omeomorfo al quoziente di D^n rispetto alla relazione che identifica i punti antipodali di S^{n-1}. Ripercorrendo tale dimostrazione è facile osservare che la preimmagine di H in D^n è data esattamente da S^{n-1}. Usando questi fatti (e facendo attenzione alle topologie quoziente coinvolte) si può mostrare che $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})/H \cong D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

15. Consideriamo la sfera unitaria S^3 come sottinsieme di $\mathbb{C}^2$ tramite l'identificazione $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, e sia

$$f\colon S^3 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\ ,$$

$$f(z_1, z_2) = [(z_1, z_2)] \ .$$

(1) Si mostri che f è un'identificazione chiusa.
(2) Si mostri che, per ogni $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è omeomorfo ad S^1.

Nel secondo semestre dimostreremo tuttavia che S^3 non è omeomorfo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times S^1$: dunque, possono esistere mappe surgettive $f \colon X \to Y$ tra varietà compatte tali che $f^{-1}(P) \cong Z$ per ogni $P \in Y$ e $X \not\cong Y \times Z$.

Soluzione. (1): Essendo composizione dell'inclusione di S^3 in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ e della proiezione $\pi \colon \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, che sono continue, la mappa f è continua. Inoltre, f è chiaramente surgettiva (in quanto ogni elemento di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ammette un rappresentante di norma unitaria), ed è chiusa in quanto S^3 è compatto e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è T_2.

(2): Sia $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e scegliamo arbitrariamente un elemento $v \in S^3$ tale che $[v] = P$. Sia poi $g \colon S^1 \to \pi^{-1}(P)$ definita da $g(e^{i\theta}) = e^{i\theta}v$. Osserviamo innanzi tutto che g è ben definita, in quanto per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ si ha $\|e^{i\theta}v\| = \|v\| = 1$, e $[e^{i\theta}v] = [v] = P$. Inoltre, g è ovviamente iniettiva, ed è surgettiva, in quanto se $w \in S^3$ è tale che $[v] = [w]$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tale che $v = \lambda w$. Dal fatto che $1 = \|w\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| = |\lambda|$ si deduce poi $\lambda \in S^1$, per cui $w = g(\lambda)$. Per concludere, basta osservare che g è anche chiusa, in quanto S^1 è compatto e $\pi^{-1}(P)$, essendo sottospazio di uno spazio T_2, è T_2.

16. Sia $\mathbb{K}$ un campo.

(1) Si dimostri che la mappa da $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ definita da

$$[x, y] \mapsto [x^2, xy, y^2]$$

è ben definita e stabilisce una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e la sua immagine.
(2) Si dimostri che una conica non degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è omeomorfa a S^2.
(3) Si dimostri che una conica non degenere non vuota in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfa a S^1.

Soluzione. (1): Sia $f \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ definita da $f(x, y) = (x^2, xy, y^2)$. Osserviamo innanzi tutto che se $(x, y) \neq (0, 0)$ allora $x^2 \neq 0$ o $y^2 \neq 0$ (o entrambe le cose), per cui $f(x, y) \neq (0, 0)$, e dunque f si restringe ad una funzione (che denoteremo ancora con f) da $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ a $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$. Inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e ogni $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ si ha $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$. Risulta pertanto che la mappa $\overline{f} \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ descritta nell'enunciato è effettivamente ben definita (e, se $\pi_i \colon \mathbb{K}^{i+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^i(\mathbb{K})$ è la proiezione, allora $\pi_2 \circ f = \overline{f} \circ \pi_1$).

Per concludere la dimostrazione di (1), verifichiamo che $\overline{f}$ è iniettiva. Siano $[a, b]$, $[c, d]$ tali che $\overline{f}([a, b]) = \overline{f}([c, d])$. Se $a = 0$, allora $f([a, b]) = [0, 0, b]$, per cui $c^2 = 0$ e $c = 0$, dunque $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$. Se invece $a \neq 0$, allora per quanto già visto anche $c \neq 0$, per cui $[a, b] = [1, b']$ e $[c, d] = [1, d']$. Ora da $[1, b', (b')^2] = \overline{f}([1, b']) = \overline{f}([1, d']) = [1, d', (d')^2]$ si deduce $b' = d'$, per cui $[a, b] = [1, b'] = [1, d'] = [c, d]$.

(2): Abbiamo visto che una conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente (e dunque omeomorfa) alla conica $\mathcal{C}$ di equazione $x_0x_2 - x_1^2 = 0$. È immediato verificare che tutti i punti della forma $[x^2, xy, y^2]$ verificano l'equazione di $\mathcal{C}$. Inoltre, se $[a, b, c] \in V(\mathcal{C})$ e $b \neq 0$, allora poiché $ac = b^2$ necessariamente anche $a \neq 0$ e $c = b^2/a$, e $\overline{f}([1, b/a]) = [1, b/a, b^2/a^2] = [a, b, b^2/a] = [a, b, c]$. Se invece $b = 0$, da $ac = b^2 = 0$ otteniamo che

$[a,b,c]=[1,0,0]$ oppure $[a,b,c]=[0,0,1]$. Nel primo caso, $[a,b,c]=\overline{f}([1,0])$, mentre nel secondo $[a,b,c]=\overline{f}([0,1])$. Abbiamo così mostrato che $\overline{f}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))=V(\mathcal{C})$.

Osserviamo ora che la funzione $f\colon \mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$ è continua. Poiché $\pi_2\circ f=\overline{f}\circ\pi_1$, per la proprietà universale della topologia quoziente ne segue che anche $\overline{f}$ è continua. Inoltre, $\overline{f}$ è chiusa in quanto definita su uno spazio compatto e a valori in uno spazio di Hausdorff. Poiché è anche iniettiva, se ne deduce che $\overline{f}$ stabilisce un omeomorfismo tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e la sua immagine, che è $V(\mathcal{C})$. La tesi segue ora dal fatto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\cong S^2$.

(3): Per il Teorema di Classificazione delle coniche reali, una conica non degenere non vuota di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente (e dunque omeomorfa) alla conica $\mathcal{C}$ di equazione $x_0x_2-x_1^2=0$. Si può procedere ora esattamente come nel punto (2), dimostrando che $V(\mathcal{C})\cong\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\cong S^1$.

17. Sia $\mathbb{K}$ un campo.

(1) Si dimostri che la mappa da $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ definita da
$$([x,y],[u,v])\mapsto[xu,xv,yu,yv]$$
è ben definita e stabilisce una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e la sua immagine.

(2) Si dimostri che una quadrica non degenere in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è omeomorfa a $S^2\times S^2$.

(3) Si dimostri che una quadrica di segnatura $(2,2)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è omeomorfa a $S^1\times S^1$.

Soluzione. (1): Sia $f\colon\mathbb{K}^2\times\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^4$ definita da $f((x,y),(u,v))=(xu,xv,yu,yv)$. Può essere utile intepretare questa funzione come segue: fissiamo l'identificazione tra $\mathbb{K}^4$ e lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{K}$ che fa corrispondere al vettore (a,b,c,d) la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$
Allora se v,w sono vettori (colonna) di $\mathbb{K}^2$, si ha $f(v,w)=v\cdot{}^tw$. Ne segue immediatamente che $f(v,w)=0$ se e solo se $v=0$ e $w=0$, per cui f si restringe ad una funzione (che denoteremo ancora con f) da $(\mathbb{K}^2\setminus\{0\})^2$ a $\mathbb{K}^4\setminus\{0\}$. Inoltre, per ogni $\lambda,\mu\in\mathbb{K}^*$ e ogni $v,w\in\mathbb{K}^2$ si ha $f(\lambda v,\mu w)=\lambda\mu f(v,w)$. Risulta pertanto che la mappa $\overline{f}\colon\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\to\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ descritta nell'enunciato è effettivamente ben definita (e, se $\pi_i\colon\mathbb{K}^{i+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^i(\mathbb{K})$ è la proiezione, allora $\pi_3\circ f=\overline{f}\circ(\pi_1\times\pi_1)$).

Per concludere la dimostrazione di (1), verifichiamo che $\overline{f}$ è iniettiva. Siano $v,w,v',w'\in\mathbb{K}^2\setminus\{0\}$ tali che $\overline{f}([v],[w])=\overline{f}([v'],[w'])$. Ciò significa che le matrici che rappresentano $f(v,w)$ e $f(v',w')$ sono proporzionali. In particolare, lo spazio vettoriale generato dalle colonne di $f(v,w)$ (che è lo spazio generato da v) coincide con lo spazio vettoriale generato dalle colonne di $f(v',w')$ (che è lo spazio generato da v'). Dunque $[v]=[v']$. Lo stesso argomento applicato alle righe di $f(v,w)$ e di $f(v',w')$ mostra che $[w]=[w']$, per cui $\overline{f}$ è iniettiva.

(2): Una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente (e dunque omeomorfa) alla quadrica $\mathcal{C}$ di equazione $x_0x_3-x_1x_2=0$. Poiché
$$x_0x_3-x_1x_2=\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1\\ x_2 & x_3\end{pmatrix},$$

tramite l'identificazione di $\mathbb{K}^4$ con lo spazio delle matrici 2×2, la quadrica $\mathcal{C}$ corrisponde alla proiezione delle matrici non nulle aventi determinante nullo, cioè alle matrici di rango 1. Ora, è facile verificare che una matrice 2×2 ha rango 1 se e solo se è della forma $v \cdot {}^t w$ per qualche $v, w \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$. Ne segue che l'immagine di $\overline{f}$ coincide esattamente con $V(\mathcal{C})$.

Dimostriamo ora che $\overline{f}$ è continua. Osserviamo innanzi tutto che la funzione $f\colon (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2 \to \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ è continua. Poiché $\pi_3 \circ f = \overline{f} \circ (\pi_1 \times \pi_1)$, per concludere che anche $\overline{f}$ è continua è sufficiente verificare che $\pi_1 \times \pi_1$ è un'identificazione. Sia X lo spazio quoziente di $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2$ rispetto alla relazione $(v, w) \sim (v', w')$ se e solo se esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ tali che $v' = \lambda v$, $w' = \lambda w$. Osserviamo che la mappa $h\colon X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $h([(v, w)]) = ([v], [w])$ è ovviamente una bigezione. Inoltre, il fatto che $\pi_1 \times \pi_1$ sia un'identificazione è equivalente al fatto che h sia un omeomorfismo. Per la proprietà universale della topologia quoziente (applicata ad X), la funzione h, essendo indotta dalla mappa continua $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $(v, w) \mapsto ([v], [w])$, è continua. Inoltre, X è compatto (ad esempio, in quanto immagine di $S^3 \times S^3 \subseteq (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ tramite la proiezione al quoziente), e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è T_2 in quanto prodotto di spazi T_2. Dunque h è un omeomorfismo. Abbiamo così dimostrato che $\overline{f}$ è continua. Essendo iniettiva e chiusa (in quanto definita su un compatto a valori in uno spazio di Hausdorff), $\overline{f}$ è perciò un omeomorfismo con l'immagine. Dunque $V(\mathcal{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2 \times S^2$.

(3): Per il Teorema di Classificazione delle quadriche reali, una quadrica non ddi $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di segnatura $(2, 2)$ è proiettivamente equivalente (e dunque omeomorfa) alla quadrica $\mathcal{C}$ di equazione $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$. Si può procedere ora esattamente come nel punto (2), dimostrando che $V(\mathcal{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1 \times S^1$.

18. Sia $n \in \mathbb{N}^+$, e si consideri l'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su $\mathbb{C}$ data dalla moltiplicazione per radici n-esime dell'unità, cioè $\overline{k} \cdot z = \exp(\frac{2\pi i k}{n})z$, dove $k \in \mathbb{Z}$ è un qualsiasi rappresentante di $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si dimostri che lo spazio quoziente $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ è omeomorfo al piano complesso $\mathbb{C}$ (suggerimento: si cerchi una opportuna funzione $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-invariante $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

Soluzione (sketch). Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$. Poiché ogni numero complesso ammette una radice n-esima, f è surgettiva. Inoltre, $f(z) = f(w)$ se e solo se $z^n = w^n$, cioè se e solo se $z = w = 0$ oppure zw^{-1} è una radice n-esima dell'unità, ovvero se e solo se z e w giacciono nella stessa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-orbita. Per concludere, è dunque sufficiente mostrare che f è un'identificazione. Tuttavia, f è propria, in quanto se $K \subseteq \mathbb{C}$ è compatto, esiste $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{B(0, R)}$, il che implica facilmente che $f^{-1}(K) \subseteq \overline{B(0, \sqrt[n]{R})}$, per cui $f^{-1}(K)$ è limitato. Essendo controimmagine di un chiuso, è anche chiuso, ed è dunque compatto per la caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Essendo propria, f è chiusa (in quanto $\mathbb{C}$ è localmente compatto, e dunque compattamente generato), ed è perciò un'identificazione. Ciò conclude la dimostrazione.

19. Si consideri l'azione di permutazione del gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$ su $\mathbb{C}^n$ data da

$$\sigma(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$$

per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si consideri la mappa $q : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definita da

$$q(\lambda) = (e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda))$$

dove se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, la funzione $e_i(\lambda)$ è definita come come il coefficiente di t^{n-i} nel polinomio $(t + \lambda_1) \cdots (t + \lambda_n)$.

(1) Si dimostri che $q(\lambda) = q(\mu)$ se e solo se λ e μ sono nella stessa $\mathfrak{S}_n$-orbita.
(2) Si dimostri che q è continua e surgettiva.
(3) Si dimostri che se $\|e_i(\lambda)\| \leq R$ per $i = 1, \ldots, n$ allora $\|\lambda_i\| \leq nR + 1$ per $i = 1, \ldots, n$.
(4) Si dimostri che q è propria.
(5) Si dimostri che il quoziente di $\mathbb{C}^n$ per l'azione di $\mathfrak{S}_n$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$.
(6) Si dimostri che q è aperta.

Soluzione. (1) Si osservi che $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$ sono le radici del polinomio $f(t) = (t + \lambda_1) \cdots (t + \lambda_n)$ e quindi a meno di permutazione sono individuate dai coefficienti $e_i(\lambda)$ del polinomio f.

(2) La surgettività di q segue dal teorema fondamentale dell'algebra che assicura che ogni polinomio a coefficienti complessi si scrive come prodotto di termini lineari. Le funzioni e_i sono polinomiali in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e quindi continue.

(3) Sia $e_i = e_i(\lambda)$. Se $\|\lambda_i\| \leq 1$ l'affermazione è ovvia. Se $\|\lambda_i\| > 1$, dall'equazione

$$\lambda_i^n = \pm e_1 \lambda_i^{n-1} \pm \cdots \pm e_{n-1} \lambda_i \pm e_n$$

applicando la disuguaglianza triangolare e l'ipotesi $\|e_i\| \leq R$ ricaviamo

$$\|\lambda_i\|^n \leq nR \|\lambda_i\|^{n-1}$$

da cui la tesi.

(4) segue subito da (3) e dalla continuità di q, per la caratterizzazione dei compatti in $\mathbb{R}^{2n}$.

(5) Dal punto (4) segue che q è chiusa. In particolare se $X \subset \mathbb{C}^n$ e $q^{-1}(X)$ è chiuso, allora, usando il fatto che q è surgettiva, ricaviamo che $X = q(q^{-1}(X))$ è anch'esso chiuso.

(6) Segue da (5) perché il quoziente per un'azione di un gruppo è sempre una mappa aperta.

20. Si consideri lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti complessi. Si dimostri che l'insieme delle matrici che hanno n autovalori distinti è un aperto.

Soluzione. Considerando i coefficienti di grado $0, 1, \ldots, n-1$ identifichiamo l'insieme E dei polinomi complessi monici di grado n con $\mathbb{C}^n$. Secondo questa identificazione la mappa q dell'esercizio precedente diventa quindi la mappa $\tilde{q} : \mathbb{C}^n \longrightarrow E$ definita da $\tilde{q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^n (t + \lambda_i)$.

Sia W l'insieme degli elementi $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$. W è un aperto di $\mathbb{C}^n$ e per l'esercizio precedente ricaviamo che l'insieme V dei polinomi monici di grado n con radici distinte è un aperto nell'insieme dei polinomi monici di grado n. Si consideri infine la mappa

$$P : Mat_{n \times n}(\mathbb{C}) \longrightarrow E$$

data dal polinomio caratteristico: $P(X) = \det(tI - X)$. Questa è una mappa continua e l'insieme delle matrici con autovalori distinti è uguale a $P^{-1}(V)$. La tesi segue.

21. Si consideri lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Si dimostri che l'insieme delle matrici che hanno n autovalori reali e distinti è un aperto.

Soluzione. Sia $E_0 \subset E$ l'insieme dei polinomi monici a coefficienti reali e sia $V_0 \subset E_0$ il sottoinsieme dei polinomi con radici reali e distinte. Se dimostriamo che V_0 è aperto possiamo concludere come nell'esercizio precedente.

Sia $f \in V_0$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ le sue radici. Costruiamo un intorno aperto di $f \in E_0$ contenuto in V_0.

Sia $d > 0$ la distanza minima tra due radici distinte di f. Si consideri l'aperto di $\mathbb{C}^n$

$$U = B(-\lambda_1, d/2) \times \cdots \times B(-\lambda_1, d/2)$$

Si osservi che per ogni $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in U$ non si ha mai $\mu_i = \mu_j$ o $\mu_i = \bar{\mu}_j$ per $i \neq j$.

Per l'esercizio 19, $q(U)$ è un aperto di V, e ogni polinomio in V_0 non ha né radici multiple né radici distinte coniugate. Quindi $q(U) \cap E$ è un aperto di V_0 che contiene f.