② X e Y sp. top. X contraibile. $g \circ f$

$$X \xrightarrow{r} P \xrightarrow{i} X \qquad r(p) = p \qquad ri = id. \qquad ir \sim id.$$

a) $[Y, X]$ ha un solo elemento.

Sia $g(y) = p \quad \forall y \in Y$

e dimostriamo che $f \sim g \quad \forall f : Y \to X$.

<u>OSS.</u>

RICORDO

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \alpha \sim \beta \quad e \quad f \sim g$$

Allora $f \circ \alpha \sim g \circ \beta$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & X \end{tikzcd} \qquad \boxed{\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & X \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "r"'] & X \end{tikzcd}}$$

$$id \circ f = f \qquad r \circ f = g$$

$$f \sim g.$$

b) Esiste una bigezione tra $[X, Y]$ e $\pi_0(Y)$

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad f(p) \in U_f \text{ comp. conn per archi di } Y$$

$$f \longmapsto U_f.$$

è ben definita.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right] & Y \end{tikzcd} \qquad e \text{ voglio far vedere che } U_f = U_g.$$

g

$f(p) \in Y \qquad g(p) \in Y.$

$H : I \times X \longrightarrow Y$ con $H_0 = f \quad H_1 = g$

$H_0(t, p) = \gamma(t) \qquad \gamma : I \longrightarrow Y$

$\gamma(0) = \underline{f(p)} \qquad \gamma(1) = \underline{g(p)}$

quindi $U_f = U_g.$

- è surgettiva

Se U è una comp. conn. per archi di Y.
allora sia $q \in U$ e sia $f(x) = q \ \forall x \in X$.
In particolare $f(p) = q$ e quindi $U_f = U$.

- è iniettiva.

Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia $q = f(p)$.
f è omotopa alla mappa $g_Q(x) = q \ \forall x \in X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g_Q"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "r"'] \arrow[r, phantom, "2"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$f \circ id = f$

$f \circ 2 = g_Q.$

quindi $f \sim g_Q.$

Abbiamo fatto vedere che se $\underline{f(p)} = \underline{g(p)}$
allora $f \sim g$.

~~A~~ssumiamo ora che $f(p)$ e $f(p)$ stiano nella stessa comp. conn e dimostriamo $f_1 \sim f_2$

$Q_1 = f_1(p)$ $\qquad$ $Q_2 = f_2(p)$

$f_1 \sim \underline{g_{Q_1}}$ $\qquad$ $f_2 \sim \underline{g_{Q_2}}$

dimostro che g_{Q_1} e g_{Q_2} sono omotope.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g_{Q_1}"] \arrow[r, bend right, "g_{Q_2}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Q_1 e Q_2 sono nella stessa comp. conn.

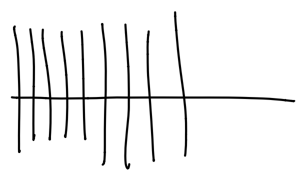
Sia $\gamma : I \longrightarrow Y$ $\qquad$ $\gamma(0) = Q_1$ $\qquad$ $\gamma(0) = Q_2$

e $H : I \times X \longrightarrow Y$

$H(t, x) = \gamma(t)$ $\qquad$ $H(0, x) = g_{Q_1}(x)$

$H(1, x) = g_{Q_2}(x)$

<u>Esercizio 4</u>



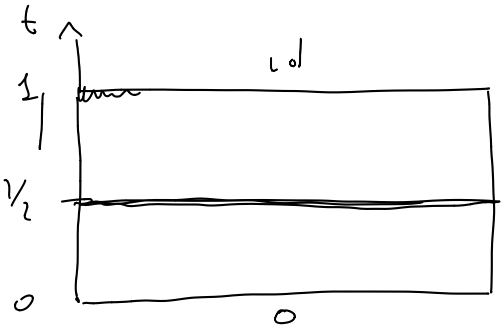
$$X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$$

1) X è contraibile

2) $x_0 = (0, 1)$ $\qquad$ X_0 non è un retratto per deformazione di X.

1) Facciamo vedere che $(0, 0)$ è un retratto per deformazione di X.

$$H\big(t,(x,y)\big) = \Big\{$$



$$H : I \times X \longrightarrow X$$

$t = 1$ $\quad 1$

$t = \frac{1}{2}$ $\quad 0$

$$\underline{H\big(t,(x,y)\big) = \big(x,(2t-1)\,y\big)}$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

$$H\big(1,(x,y)\big) = (x,y)$$

$$H\big(\tfrac{1}{2},(x,y)\big) = (x,0)$$

$$\underline{H\big(t,(x,y)\big) = (2tx\,;\,0)}$$

$t = \frac{1}{2}$

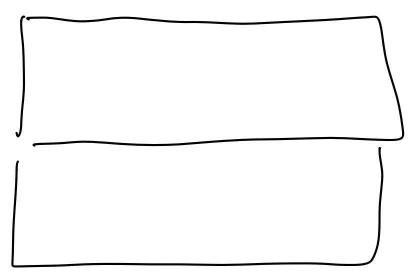
$$H\big(\tfrac{1}{2};(x,y)\big) = (x,0)$$

$t = 0$

$$H\big(0,(x,y)\big) = (0,0)$$

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

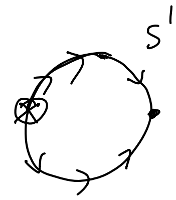
t



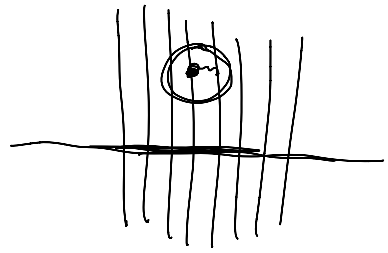
Per controllare che H sia continua devo verificare che le due funzioni H coincidano per $t = \frac{1}{2}$.

Infatti ottengo $H\left(\frac{1}{2};(x,y)\right) = (x,0)$

in entrambi i casi.



2) X non è retraibile per deformazione a $(0,1) = x_0$.



p.a.

Sia $H : I \times X \longrightarrow X$

$$\left|\begin{array}{ll} H_0 \equiv x_0 & H(t,x) = x_0 \quad \forall x. \\ H_1 = id. & \\ H(t, x_0) = x_0 & \forall t. \end{array}\right. \quad *$$

Sia $U = B\left(x_0; \frac{1}{2}\right) \subset X$

e sia $V = H^{-1}(U)$

ossia che $H(I \times \{x_0\}) \subset U$

$$\underline{I \times x_0} \subset \underline{V}.$$

Esiste un intorno di x_0, W tale che $I \times W \subset V$.
(I compatto)

$\forall p \in W \qquad H(t,p) \in U$

Sia $p \in W$ $\quad P = (x_p, y_p)$ con $x_p \neq 0$. x_p è razionale.

$$H(0,(x_p,y_p)) = (\underline{0}, 1) \qquad \alpha$$
$$H(1,(x_p,y_p)) = (\underline{x_p}, y_p)$$

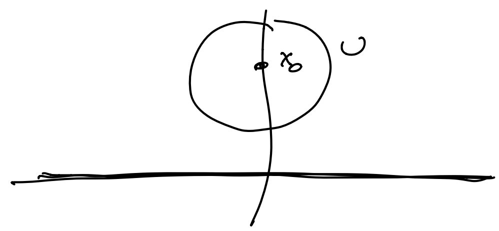
$$\alpha(t) = H(t,p)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha(0) = 0 \qquad \alpha(1) = x_p \neq 0 \\ \alpha(t) \in \mathbb{Q} \quad \forall t. \end{array}}$$

$H(t,p) \subset U$ e tutti gli elementi di U hanno l'ascisse in $\mathbb{Q}$.

$\cap$

V



ma una funzione continua da I in $\mathbb{Q}$ è costante #

$X \subset Y$.
- $r : Y \longrightarrow X$ $\quad r\, i = id_X$
- $\boxed{i\, r \sim id_Y}$ $\quad *$

(retrazione per deformazione)
- $H_0 = id_Y \qquad H_1 = i \circ r$

$$H(t,x) = x \quad \forall x \in X.$$

PROBLEMA Dato uno spazio X capire se i lacci dentro X si possono contrarre o deformare uno nell'altro.

Lacci = mappe da S^1 a X.

$I = [0,1]$

DEFINIZIONE X $\quad x_0, x_1 \in X$

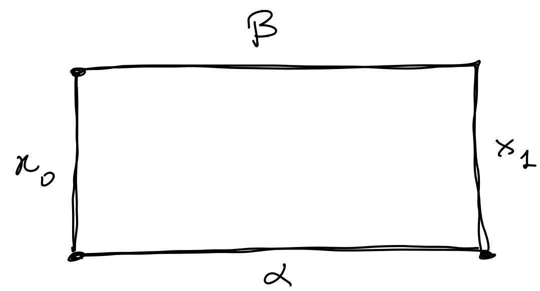
$$\Omega(X, x_0, x_1) = \{ \alpha : I \to X : \quad \alpha(0) = x_0 \quad \alpha(1) = x_1 \}$$

Si chiama lo spazio dei cammini da x_0 a x_1.

Se α e $\beta \in \Omega(X, \underline{x_0}, \underline{x_1})$ diciamo che α è omotopa a β e scriviamo $\alpha \sim \beta$

se esiste $H : I \times I \to X$

tale che
$$H_0 = \alpha \qquad H_1 = \beta$$
$$(*) \quad \begin{array}{l} H(0, t) = x_0 \quad \forall t \\ H(1, t) = x_1 \quad \forall t. \end{array}$$



OPZIONI ALTERNATIVE

- Se eliminiamo la condizione $(*)$ allora tutte le α, β in $\Omega(X, x_0, x_1)$ sono omotope tra loro. (ESR.)

- Nel caso in cui $x_0 = x_1$ ere considerare le mappe da S^1 in X e quindi studiare $[S^1, X]$.
  (SU QUESTO TORNEREMO)

VERIFICHE INIZIALI

- LA RELAZIONE $\sim$ INTRODOTTA SU $\Omega(X, x_0, x_1)$ È DI EQUIVALENZA.

VA VERIFICATO PERCHÉ È DIVERSA DALL'OMOTOPIA USUALE, MA LA VERIFICA È PROPRIO LA STESSA.

DEFINIZIONE (GRUPPO FONDAMENTALE)

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0) / \sim$$

Esempio $X = [a, b]$

$\Omega(X, a, b) / \sim$ ha un unico elemento.

$\alpha, \beta : I \longrightarrow \underline{[a, b]}$ con $\alpha(0) = \beta(0) = a$, $\alpha(1) = \beta(1) = b$.

$$H(s, t) = t\alpha(s) + (1-t)\beta(s) \in [a, b]$$

$t = 0 \quad \beta = H_0$

$t = 1 \quad \alpha = H_1$

$$H(0, t) = ta + (1-t)a = a$$

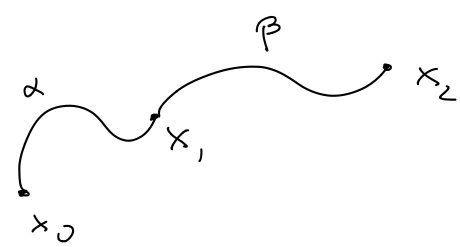
$$H(1, t) = tb + (1-t)b = b.$$

DEFINIZIONE CONCATENAZIONE DI CAMMINI

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \in X$

$\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$

$\beta \in \Omega(X, x_1, x_2)$



DEFINISCO $\alpha * \beta : I \longrightarrow X$

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2} \qquad \alpha(1) = x_1 = \beta(0)$

OSS 1 È BEN DEFINITA IN OMOTOPIA

SE $\alpha, \gamma \in \Omega(X, x_0, x_1) \qquad \alpha \sim \gamma$

$\beta, \delta \in \Omega(X, x_1, x_2) \qquad \beta \sim \delta$

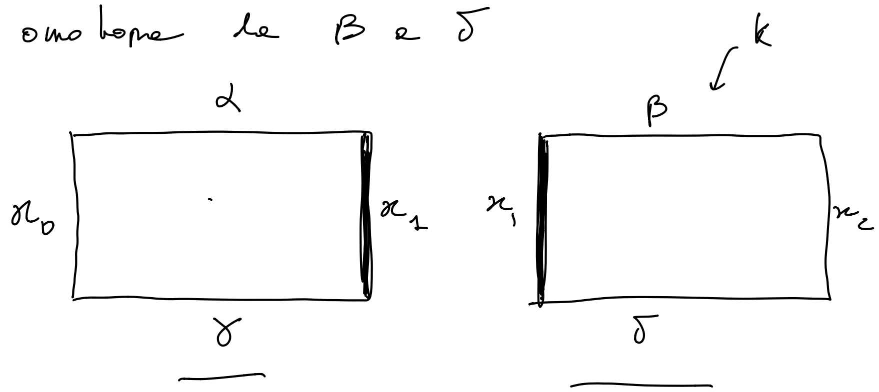
ALLORA $\underline{\alpha * \beta \sim \gamma * \delta}$

dim

Sia H una omotopia tra α e γ

K una omotopia tra β e δ

H :



~~K~~

Definisco L una omotopia tra $\alpha * \beta$ e $\gamma * \delta$

$$L(s,t) = \begin{cases} \underline{H(2s, t)} & s \le \frac{1}{2} \\ K((2s-1), t) & \frac{1}{2} \le s \end{cases}$$

per $s = \frac{1}{2}$ $\quad H(1, t) = x_1$

$K(0, t) = x_1$

L è ben definita e continua.

$$L(s, 0) = \begin{cases} H(2s, 0) = \underline{\alpha(2s)} & s \le \frac{1}{2} \\ K((2s-1), 0) = \underline{\beta(2s-1)} & \frac{1}{2} \le s \end{cases}$$

$$L(s,0) = \alpha * \beta$$
$$L(s,1) = \gamma * \delta$$

$$L(0,t) = x_0 \qquad = H(0,t) = x_0$$
$$L(1,t) = x_2 \qquad K(1,t) = x_2$$

<u>POSSIAMO DEFINIRE</u>

Se $[\alpha] \in \Omega(X, x_0, x_1)/\sim$

$[\beta] \in \Omega(X, x_1, x_2)/\sim$

$$[\underset{\rightarrow}{\alpha}] * [\underset{\rightarrow}{\beta}] = [\alpha * \beta]$$

NON DIPENDE DALLA SCELTA DEI RAPP. α e β.

<u>DEFINIZIONE</u> $x_0 \in X$ $x_1 \in X$

$$1_{x_0} : I \longrightarrow X \qquad 1_{x_0}(t) = x_0 \quad \forall t.$$

E SE $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$ DEFINIAMO

$i(\alpha)$, IL CAMMINO INVERSO (E LO INDICHEREMO ANCHE CON α^{-1})

$$i(\alpha) \in \Omega(X, x_1, x_0)$$

$$i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$$

<u>OSSERVAZIONE</u> $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$ $\beta \in \Omega(X, x_0, x_1)$

1) $\alpha * 1_{x_1} \sim \alpha \sim 1_{x_0} * \alpha$ (ESR)

2) $\alpha \sim \beta$ allora $i(\alpha) \sim i(\beta)$

3) $i(i(\alpha)) = \alpha$ (OVVIA)

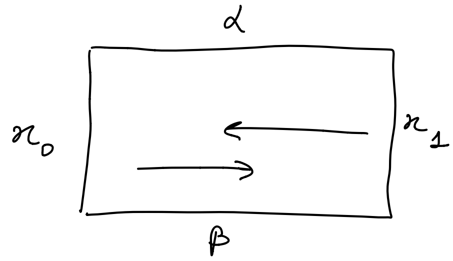
4) $\alpha * i(\alpha) \sim 1_{x_0}$

dim

2) $\alpha \sim \beta$ $\quad H : I \times I \longrightarrow X$

$H_1 = \alpha \qquad H_0 = \beta$

$H(0,t) = x_0 \qquad H(1,t) = x_1 \ \forall t$

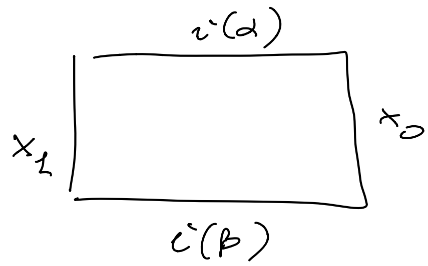


Defino

$$K(s,t) = H(1-s,t)$$

$$K(s,0) = H(1-s,0) = \beta(1-s) = i(\beta)(s)$$

$$K(s,1) = H(1-s,1) = \alpha(1-s) = i(\alpha)(s)$$



$$K(0,t) = H(1,t) = x_1$$

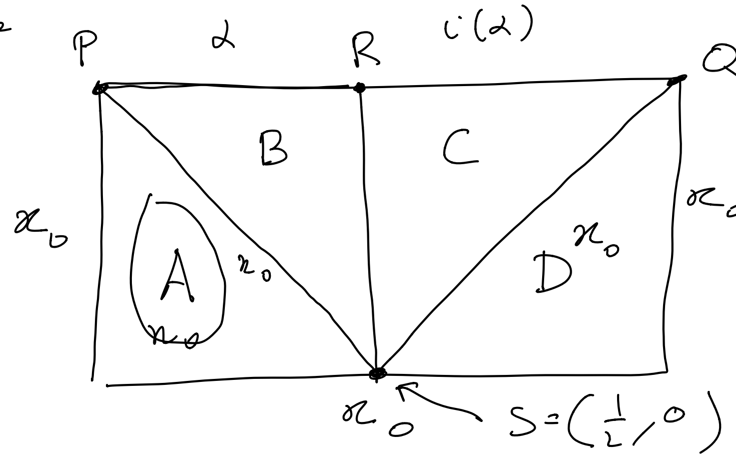
$$K(1,t) = H(0,t) = x_0$$

4) $\underline{\alpha * i(\alpha)} \sim 1_{x_0}$

Devo costruire l'omotopia

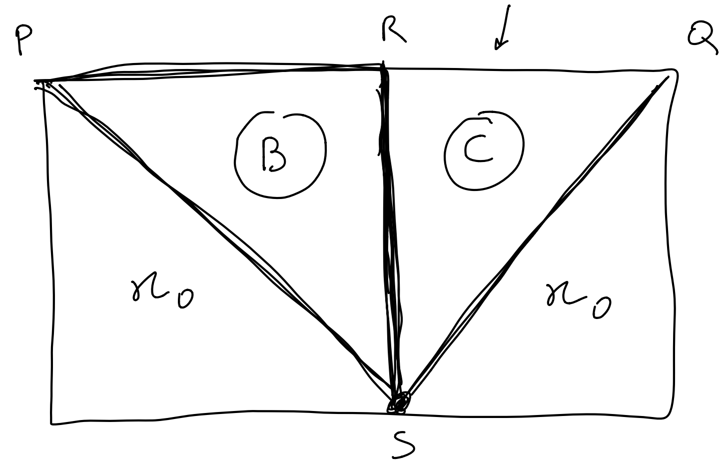
$H : I \times I \longrightarrow X$

con le proprietà in figura



Divido $I \times I$ nei 4 triangoli rappresentati in figura

$$H((s,t)) = \begin{cases} x_0 & (s,t) \in A \\ \alpha(\varphi(s,t)) & (s,t) \in B \\ \alpha(\psi(s,t)) & (s,t) \in C \\ x_0 & (s,t) \in D \end{cases}$$



Sia φ la trasformazione affine che manda

P e S in 0

e R in 1

φ: Triangolo PRS $\longrightarrow I$

$$\varphi(s,1) = 2s$$

sul lato PS $\quad \varphi = 0.$

$$\varphi\left(\tfrac{1}{2}, t\right) = t$$

Sia ψ la trasform affine che manda S, Q in 0

e R in 1

$$\psi\left(\tfrac{1}{2}, t\right) = t$$

sul lato QS $\quad \psi = 0$

$$\psi(s, 1) = 2(1-s)$$

$s = \frac{1}{2} \quad 1$

$s = 1 \quad 0$

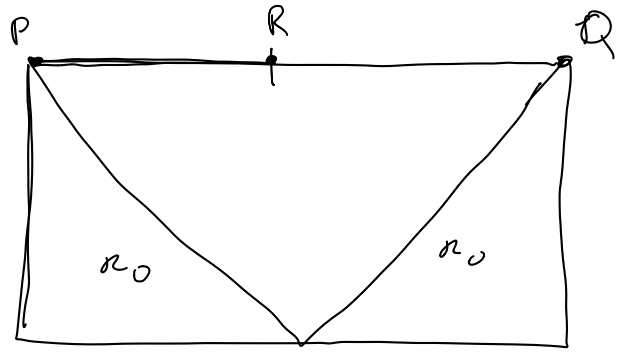
oss 1 H è ben definita e continua

infatti su ogni triangolo è continua

e su lati comuni a due triangoli

le definizioni coincidono.

OSS2 $H(0,t) = H(1,t) = H(s,0) = x_0$



$$\begin{cases} H(s,1) = \alpha(2s) & s \leq \frac{1}{2} \\ H(s,1) = \alpha(2(1-s)) = \alpha(2-2s) & \frac{1}{2} \leq s \end{cases}$$

$$\alpha * \underline{i(\alpha)} = \begin{cases} \alpha(2s) & s \leq \frac{1}{2} \\ i(\alpha)(2s-1) = & \frac{1}{2} \leq s \end{cases}$$

$= \alpha(2-2s)$

#