LEZIONE 18

ANALISI 2

NOVAGA

4/3/2021

OSS: ω 1-FORMA C^1 ESATTA $\Rightarrow$

$\exists f \in C^2$ T.C. $df = \omega$, CIOÈ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = v_i(x)$ $\forall i$

DOVE $\omega(x) = \sum v_i(x)\, dx^i$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j} \quad *$$

DEF: ω 1-FORMA C^1 È CHIUSA

SE VERIFICA $*$

OSS: ω ESATTA $C^1 \Rightarrow \omega$ CHIUSA

OSS:

1-FORME	CAMPI DI VETTORI
ESATTE $\omega = df$	CONSERVATIVI $v = \nabla f$
CHIUSE	IRROTAZIONALI

È VERO IL VICEVERSA, CIOÈ CHIUSA $\Rightarrow$ ESATTA ?

IN GENERALE NO

ES: $(n=2)$ $\quad \omega : A \to (\mathbb{R}^2)^*$ $\quad A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$\Rightarrow$ ω È CHIUSA MA NON ESATTA

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ω È CHIUSA

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} a(\cos t, \sin t)\cdot(-\sin t) + b(\cos t, \sin t)\cdot \cos t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t = 2\pi > 0.$$

ω NON È ESATTA

DIPENDE DAL DOMINIO A DELLA FORMA ω.

PROP: $\omega : R \to (\mathbb{R}^n)^*$ CHIUSA

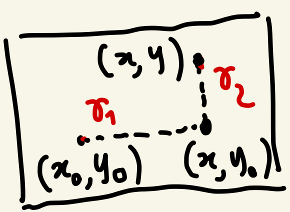
$R = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ RETTANGOLO ANCHE ILLIMITATO

$\Rightarrow$ ω È ESATTA.

DIM: $(n=2)$ $\omega(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$

FISSIAMO $(x_0,y_0) \in R$ E PONIAMO

R



$$f(x,y) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

VERIFICHIAMO CHE $df = \omega$, CIOÈ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \quad \text{E} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b .$$

$$\gamma_1(t) = (t, y_0) \quad t \in [x_0, x], \qquad \gamma_2(t) = (x, t) \quad t \in [y_0, y],$$

$$f(x,y) = \int_{\gamma_1} a(x,y)\,dx + \int_{\gamma_2} b(x,y)\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} b(x,t)\,dt$$

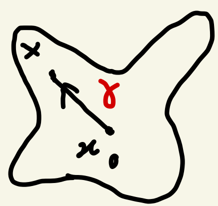
$$\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y) \qquad \text{OK}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial b}{\partial x}(x,t)\,dt \qquad \left(\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}\right)$$

$$= a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a}{\partial y}(x,t)\,dt$$

$$= a(x,y_0) + a(x,y) - a(x,y_0) = a(x,y) \qquad \text{OK}$$

OSS: UNA VARIANTE DELLA DIM. FUNZIONA NEI DOMINI STELLATI



γ LINEARE CON ESTREMI x_0 FISSATO E x,

$$f(x) = \int_\gamma \omega \Rightarrow df = \omega$$

DOMANDA: È POSSIBILE CARATT. I DOMINI A T.C. ω CHIUSA $\Leftrightarrow$ ω ESATTA

PIÙ IN GENERALE

TEO 1: $\omega : A \to (\mathbb{R}^n)^*$ CHIUSA, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO

$\Rightarrow$ ω È ESATTA.

OSS: A NON È S.C. $\exists$ FORME CHIUSE MA NON ESATTE.

RICORDO: A S.C. SE A CONNESSO E

$\forall \gamma$ CURVA CHIUSA IN A

γ È OMOTOPA A UN PUNTO, CIOÈ $\pi_1(A) = 0$.

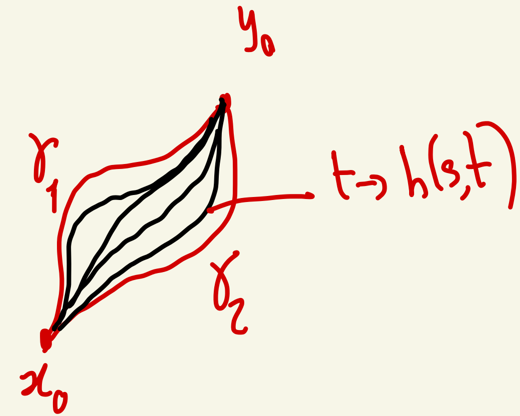
OSS: A APERTO È S.C. $\Longleftrightarrow$ OGNI CURVA C^∞ CHIUSA

È OMOTOPA A UN PUNTO CON OMOTOPIA C^∞

TEO 2: ω CHIUSA, γ_1, γ_2 OMOTOPE IN A,

CON γ_1, γ_2 E L'OMOTOPIA C^∞,

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$



DIM (TEO 1): A S.C. γ CHIUSA C^∞

γ OMOTOPA A $\tilde{\gamma}$ CURVA COSTANTE

$$\Rightarrow \text{PER TEO 2}, \int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega = 0$$

PER APPROSSIMAZIONE $\int_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma$ CHIUSA

$\Rightarrow \exists$ ω ESATTA.

DIM (TEO 2): $h(s,t)$ $s \in [0,1]$ OMOTOPIA TRA

γ_1 E γ_2: $h(0,t) = \gamma_1(t)$ E $h(1,t) = \gamma_2(t)$.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\boxed{\partial_s \int_{h(s,t)} \omega = 0}$

$$\Rightarrow \int_{(s,t)} \omega = \text{cost} \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

FISSIAMO PER SEMPLICITÀ $n=2$

$$\omega(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$

$$h(s,t) = \left(h^1(s,t),\ h^2(s,t)\right) \quad s\in[0,1],\ t\in I$$

$$h_s(s,t) = 0 \quad s\in[0,1],\ t\in\partial I$$

$$\partial_s \int_{h(s,t)} \omega = \partial_s \int_I \left[a(h),\ b(h)\right] \cdot \underbrace{h_t(s,t)}_{\text{DERIVATA PARZIALE}}\, dt$$

$$= \int_I \left[a_x h^1_s + a_y h^2_s,\ b_x h^1_s + b_y h^2_s\right]\cdot\left[h^1_t,\ h^2_t\right] + \int_I (a,b)\cdot \underbrace{h_{ts}}_{\text{INT. x PARTI}}\, dt$$

$$= \int_I \left[a_x h^1_s h^1_t + a_y h^2_s h^1_t + b_x h^1_s h^2_t + b_y h^2_s h^2_t\right] - (a,b)_t \cdot h_s\, dt$$

$$\underbrace{\left[a_x h^1_s h^1_t + a_y h^2_s h^1_t + b_x h^1_s h^2_t + b_y h^2_s h^2_t\right]}_{(a,b)_s\, h_t}$$

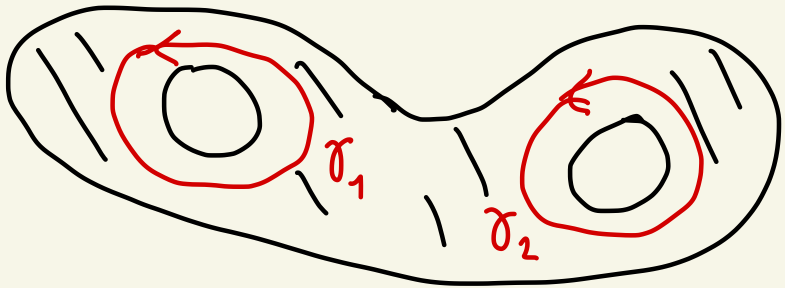
$$
= \int_{\Gamma} \Big(\cancel{a_x h^1_s h^1_t} + a_y h^2_s h^1_t + b_x h^1_s h^2_t + \cancel{b_y h^2_s h^2_t}
$$

$$
- \cancel{a_x h^1_t h^1_s} - a_y h^1_s h^2_t - b_x h^1_t h^2_s - \cancel{b_y h^2_s h^2_t} \Big) \, dt
$$

$$
= \int_{\Gamma} (b_x - a_y)(h^1_s h^2_t - h^1_t h^2_s) = 0
$$

ω CHIUSA $\Longleftarrow$ $a_y = b_x$.

COSA SI PUÒ DIRE IN GENERALE



ω CHIUSA, VOGLIAMO VEDERE SE $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ CHIUSA

$[\gamma] \in \pi_1(A)$ CLASSE DI EQ. DI γ

$[\gamma] = \sum_{1}^{N} a_i \gamma_i \quad a_i \in \mathbb{Z}$, γ_i GENERATORI DI $\pi_1(A)$

È SUFF. VERIFICARE CHE $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ GENERATORE DI $\pi_1(A)$