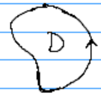
10 marzo 2021

THM: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad P, Q \in C^1(\Omega)$

$D \subseteq \Omega$ dominio regolare. Allora

$$\int_{+\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D [\partial_x Q - \partial_y P]\,dx\,dy$$



5 marzo

Teorema di Gauss-Green

Dominio regolare: unione di domini normali con parti interne disgiunte

Per dimostrare il teorema basta provarlo su domini normali

LEMMA: $\boxed{\int_{+\partial D} P\,dx = -\iint_D \partial_y P\,dx\,dy}$ $(*)$ se D normale risp. a x o rispetto a y

$$\int_{+\partial D} Q\,dy = \iint_D \partial_x Q\,dx\,dy$$

Dimostrazione di $(*)$ del lemma

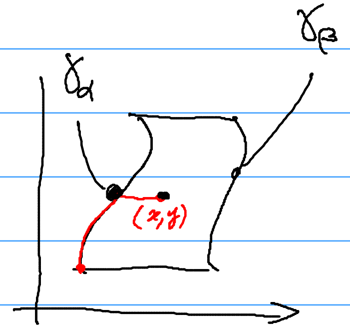
→ per domini normali risp. a x ✓

→ " " " " a y

$$F(x,y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} P\,dx = \int_a^y P(\alpha(t),t)\,\alpha'(t)\,dt + \int_{\alpha(y)}^x P(s,y)\,ds$$

$$\partial_x F = P(x,y) \quad ✓$$

$$\boxed{\partial_y F = \int_{\alpha(y)}^x \partial_y P(s,y)\,ds} \quad ✓$$



$\gamma_\alpha : t \mapsto (\alpha(t), t)$

$$G(w,y) \doteq \int_w^x P(s,y)\,ds$$

$$\partial_1 G(w,y) = -P(w,y)$$

$$\partial_2 G(w,y) = \int_w^x \partial_y P(s,y)\,ds$$

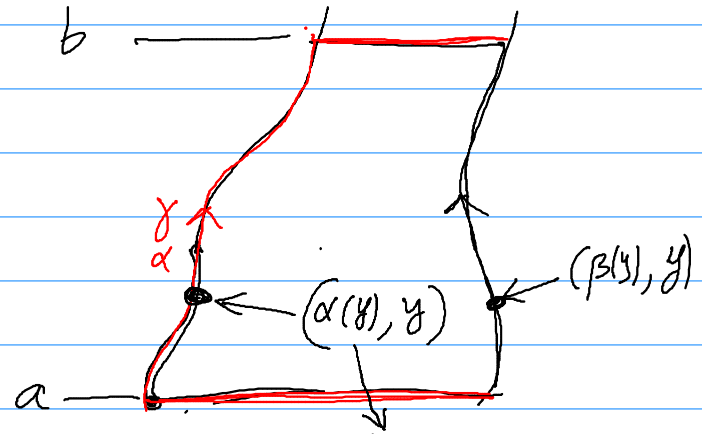
$$\partial_y\left[\int_{\alpha(y)}^x P(s,y)\,ds\right] = \partial_y\left[G(\alpha(y),y)\right] = \partial_1 G(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) + \partial_2 G(\alpha(y),y) = -P(\alpha(y),y)\,\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^x \partial_y P(s,y)\,dy$$

$\Rightarrow$ F è C^1 e

$\partial_x F\,dx + \partial_y F\,dy$ è forma esatta

$$\Rightarrow \boxed{\int_{+\partial D} \partial_x F\,dx} + \boxed{\partial_y F\,dy} = 0$$

$$\int_{+\partial D} P\,dx + \iint_D \partial_y P\,dx\,dy = 0$$



$$\partial_y F(x,y) = \int_{\alpha(y)}^x \partial_y P(s,y)\,ds$$

$$\int_{+\partial D} \partial_y F\,dy = \cancel{\int_{-\gamma_\alpha} \partial_y F\,dy} + \int_{\gamma_\beta} \partial_y F\,dy$$

$$= \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \partial_y P(x,y)\,dx = \iint_\Omega \partial_y P\,dx\,dy$$

La dim. dell'altra eq. si deduce da questa

Corollario: Teorema della divergenza (in $\mathbb{R}^2$)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\vec{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ← campo vett $\quad \vec{F} = (F_1, F_2)$

$D \subseteq \Omega$ dominio normale

$$\Longrightarrow \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dx dy \qquad \operatorname{div} F \doteq \partial_x F_1 + \partial_y F_2$$

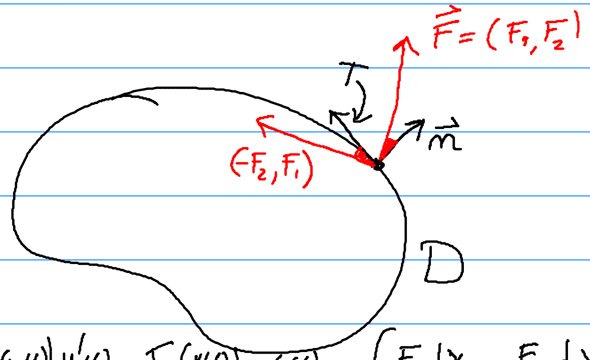
ds: elemento di lunghezza

Dim:

Se $\gamma(t)$ è una qualunque parametrizz $\quad \gamma : [a,b] \longrightarrow \partial D$

$ds = |\gamma'(t)| \, dt \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$\vec{n}(\gamma(t)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \left(y'(t), -x'(t) \right)$



$$\int_a^b \left[F_1(\gamma(t)) \cdot \frac{y'(t)}{\cancel{|\gamma'(t)|}} + F_2(\gamma(t)) \frac{(-x'(t))}{\cancel{|\gamma'(t)|}} \right] \cancel{|\gamma'(t)|} \, dt = \int_a^b F_1(\gamma(t)) y'(t) - F_2(\gamma(t)) x'(t) = \int_{+\partial D} F_1 \, dy - F_2 \, dx$$

$-F_2 = P$

$F_1 = Q$

$$= \iint_D \left[\partial_x F_1 - \partial_y(-F_2) \right] dx dy = \iint_D \partial_x F_1 + \partial_y F_2 \, dx dy$$

Formula dell'Area

D dominio regolare $\qquad \text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x \, dy - y \, dx$

regolari di $\mathbb{R}^2$

TEOREMA: Tra tutti i domini γ con bordo di lungh. finita, il disco è quello di area massima.

— o —

SPG, D diffeomorfo a un disco, ∂D è C^1, $\ell(+\partial D) = 2\pi$

$\gamma(s)$ parametrizzazione di $+\partial D$, $\ell(\gamma) = 2\pi$

voglio dimostrare che $\boxed{\text{Area}(D) \leq \pi}$ e vale l'uguale sse D è un disco.

$$\ell(\partial D) = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma'(s)|^2 ds$$

$|\gamma'(s)| = 1$

$\gamma : [-\pi, \pi] \longrightarrow +\partial\Omega$

$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [x'(s)^2 + y'(s)^2] ds$$

$\overline{z(s)} = x(s) - i y(s)$

$z'(s) = x'(s) + i y'(s)$

$z : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}(\bar{z} z') = x x' + y y'$

$$\text{Area}(\partial D) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [x(s) y'(s) - y(s) x'(s)] ds$$

$$\ell(\partial D) = \int_{-\pi}^{\pi} z'(s) \, \bar{z}'(s) \, ds \qquad \text{Area}(\partial D) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}\left(\overline{z(s)} \, z'(s)\right) ds$$

Sviluppo la funzione z usando le serie di Fourier

$$z(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{iks}$$

$$z'(s) = i \sum_{k \in \mathbb{Z}} k c_k e^{iks}$$

Esprimiamo $\ell(\partial D)$ e $\text{Area}(D)$ in termini dei $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ $\leftarrow$ $\mathbb{C}$

$$-\ell(\partial D) = \int_{-\pi}^{\pi} \overset{z'(s)}{\left(i \sum_{k\neq 0} k c_k e^{iks}\right)} \overset{\overline{z'(s)}}{\left(-i \sum_{h\neq 0} h \bar{c}_h e^{-ihs}\right)} ds$$

$$= \sum_{h,k} kh c_k \bar{c}_h \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)s} ds = 2\pi \sum_{k\neq 0} k^2 |c_k|^2 \quad (= 2\pi)$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \text{Im} \sum_k \bar{c}_k e^{-iks} \sum_{h\neq 0} i h c_h e^{ihs} ds = \cancel{\text{Re}}\left(\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} k |c_k|^2\right)(2\pi)$$

$$\text{Area}(D) = \frac{2\pi}{2}\sum_{k\neq 0} k|c_k|^2 \leq \pi \sum_{k\neq 0} |k|\,|c_k|^2 \leq \pi \sum_{k\neq 0} |k|^2 |c_k|^2 = \pi$$

$\boxed{= \text{ sse } c_k = 0 \ \forall k<0}$ $\qquad$ $\boxed{= \text{ sse } c_k = 0 \ \forall |k|\neq 1}$

L'unico caso in cui $\text{Area}(D) = \pi$ è $c_k = 0 \ \forall k \neq 1$

$z(t) = e^{it}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x x' + y y')\, ds = 0 \iff \underbrace{\int_{+\partial D} \overbrace{x\,dx + y\,dy}}_{=0}$$

è esatta è dU con $U = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

Sia $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica. $\Delta u = 0$ $\qquad \boxed{\partial_x^2 u + \partial_y^2 u}$

Mostrare che, se Ω è semplicemente connesso, allora $\exists\, v \in C^2(\Omega)$ tale che

$$\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0 \quad \text{su } \Omega$$

[Sugg: osservare che la forma $\partial_y u\, dx - \partial_x u\, dy$ è chiusa (e quindi esatta)]

Forme chiuse e forme esatte

Dire quali delle seguenti forme sono chiuse, quali esatte
e nel caso calcolare il potenziale

(1) $\omega(x,y) = \overset{A}{(-y)}\,dx + \overset{B}{(\sin x)}\,dy$

(2) $\omega(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(y\,dx - x\,dy)$

(3) $\omega(x,y,z) = (y-z)\,dx + (x+z+1)\,dy + (y-x+1)\,dz$

forma esatta
$\Downarrow$
forma chiusa

—o—

$\partial_y A = \partial_x B$ ($\Leftrightarrow$ chiusa)

$-1 \overset{?}{=} \cos x$ falsa la prima non è chiusa

$A = \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)y = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$

$B = \left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)(-x) = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$

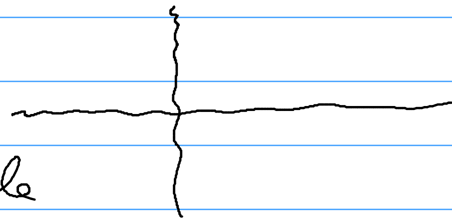
$\partial_y A = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

$\partial_x B = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$

$\partial_y A - \partial_x B = 0$

la forma è chiusa

ω è definita su $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$



esercizio: scrivere esplicitamente l'espressione per il potenziale